Geometria Analítica

Antonio Conde

Ao meu neto
Victor

Sumário

1 Generalidades **1**

1.1 Operações 3

1.2 Projeção 11

1.3 Desigualdade de Schwarz 12

1.3.1 Ângulo entre dois vetores 14

2 Aplicações lineares **17**

2.1 Rotação 23

2.2 Retas no plano $\mathbb{R}^2$ 24

2.3 Reflexão 31

2.4 Glide e classificação das isometrias 38

2.5 Inversa de uma aplicação linear 45

3 O espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ **51**

3.1 Operações 51

3.2 Ângulo 56

3.3 Projeção 56

3.4 O produto vetorial 61

3.5 Aplicações lineares 64

3.6 O determinante 72

3.7 O Cone 79

3.8 Mais matrizes 82

4 Cônicas **91**

4.1 Elipse 91
4.2 A hiperbóle 101
4.3 A parábola 107
4.4 Secções do cone 116
4.5 Diâmetros das cônicas 122
4.6 Propriedades óticas das cônicas 125
4.7 Diretrizes da elipse 129
4.8 Diretrizes da hipérbole 132

5 Coordenadas polares **135**

5.1 Equação polar das cônicas 137

6 Superfícies **141**

6.1 O plano 142
6.2 Quádricas 148
6.2.1 Esferas 148
6.2.2 O elipsóide 150
6.2.3 O hiperbolóide 152
6.2.4 O parabolóide 154
6.2.5 Parabolóide hiperbólico 155
6.2.6 Superfícies regradas 156
6.2.7 Quádricas cilíndricas 161

7 Curvas Transcedentais **165**

7.1 Exponencial e logarítimo 166
7.2 Cardióide 167
7.3 Limaçon 168

7.4 Lemniscata 168
7.5 Trevo de quatro folhas 169
7.6 Ovais de Cassini 169
7.7 Espiral de Arquinedes 170
7.8 Espiral exponencial 171
7.9 Espiral hiperbólica 172
7.10 Catenária 172
7.11 Ciclóide 173
7.12 Epiciclóide 176
7.13 Hipociclóide 177

PREFÁCIO

A Geometria Analítica que mescla idéias da álgebra e da geometria representa o primeiro passo revolucionário da matemática moderna. Este desenvolvimento data dos séculos 16 e 17 e tem os nomes de P. Fermat e R. Descartes como seus fundadores.

Este é um curso de Geometria Analítica, que lecionamos no primeiro semestre de 2002 na USP de São Carlos.

Adotamos aqui uma abordagem que faz uso das noções básicas da Álgebra Linear em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Tivemos o cuidado de introduzir cada um dos conceitos usados de Álgebra Linear. Acreditamos que tal abordagem tenha efeitos múltiplos como facilitar a exposição da Geometria Analítica, preparar o aluno para o curso de Álgebra Linear de forma gradual e expor o aluno a um ensino mais orgânico no seio da matemática com mais interações entre suas partes. Com a Álgebra Linear que introduzimos, poderíamos fazer um uso mais intenso da mesma, o que evitamos em favor de argumentos mais diretos e elementares. Poderíamos também explorar um pouco da chamada Geometria Afim, mas isto fica para uma futura edição.

Deixo aqui meus agradecimentos antecipados a todos que puderem contribuir com correcões e críticas. Agradeço também ao apoio da Secretaria do Departamento de Matemática pelo excelente trabalho de digitação do Sr. Luiz.

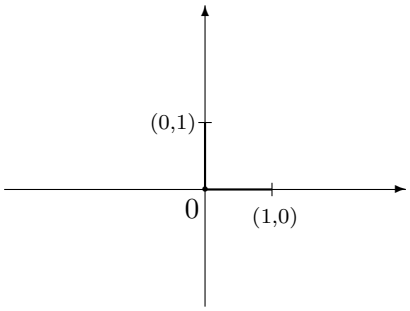
São Carlos, Setembro de 2002.

Antonio Conde

Capítulo 1

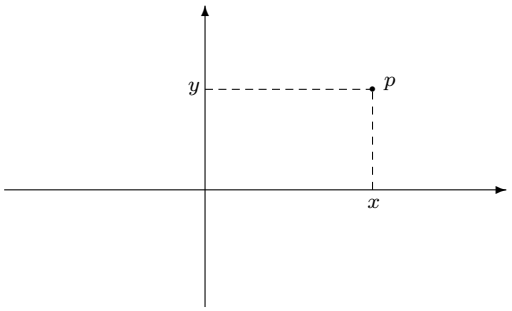
Generalidades

A geometria dita analítica procura estudar a geometria elementar que conhecemos, através da álgebra. Esta é uma forma simplificada de caracterizá-la. Tal área da matemática teve seu início com trabalhos de Descartes, de Fermat; por isso usa-se também o nome de Geometria Cartesiana, em homenagem a Descartes. A passagem de uma "situação geomética"para a álgebra, se faz associando-se pontos a números reais. No plano, fixamos duas retas ortogonais que se cruzam num ponto escolhido e fixado O , que nos acostumamos a desenhá-las assim:



Como sabemos, o corpo de todos os números reais $\mathbb{R}$ pode ser posto em correspondência com os pontos de uma reta desde que fixamos um ponto O representando

o zero e um ponto 1 representando o número 1. Assim sendo a reta horizontal que tem 0 e $(1,0) = 1$ representa com seus pontos o corpo dos números reais $\mathbb{R}$. O mesmo acontece com a reta vertical por O e (0,1). Dado agora um ponto qualquer p do plano determinado por estas duas retas, podemos associar a p, dois números reais, numa certa ordem (x, y) onde x é a projeção ortogonal de p na reta horizontal e y é a projeção de p na reta vertical, como abaixo:



A reta horizontal é chamada de eixo dos x's e a reta vertical de eixo dos y's. Se o ponto p está associado ao par ordenado (x, y); dizemos que x e y são suas coordenadas; x é a primeira e y a segunda coordenada de p.

A cada par ordenado de números reais (x, y) está também associado um ponto p do plano. Basta, para isso, ver o encontro (intersecção) das retas ortogonais uma paralela ao eixo dos x's passando por y e outra paralela ao eixo y's passando por x. O referido ponto de encontro destas duas retas é o ponto p de coordenadas (x, y). Denotamos por

$$p = (x, y)$$

tal correspondência e denotamos o plano todo por $\mathbb{R}^2$, indicando que este é o conjunto dos pares ordenados de números reais

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \text{ e } y \in \mathbb{R}\} .$$

Quando precisamos ser mais específicos, dizemos que $(x, y) = p$ são as coordenadas cartesianas do ponto p.

Até o momento $\mathbb{R}^2$ e apenas um conjunto, mas como $\mathbb{R}$ tem as operações de adição e multiplicação, podemos introduzir em $\mathbb{R}^2$ certas operações que serão úteis

1.1 Operações

Adição em $\mathbb{R}^2$

Definição 1.1.1. *Dados dois elementos (pontos)* (x_1, y_1) *e* (x_2, y_2) *de* $\mathbb{R}^2$*, definimos adição dos mesmos, como sendo o elemento de* $\mathbb{R}^2$*, denotado por* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ *assim:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2)\,.$$

Multiplicação por escalar

Os números reais são chamados, neste contexto, de escalares.

Definição 1.1.2. *Dados um número real* λ *e um ponto* (x, y) *do plano* $\mathbb{R}^2$*, definimos a multiplicação de* (x, y) *pelo escalar* λ*, que denotamos por* $\lambda(x, y)$*, assim:*

$$\lambda(x, y) = (\lambda x\,,\, \lambda y)\ .$$

Temos então $\mathbb{R}^2$ estruturado com duas operações: a adição e a multiplicação por escalar. Denotaremos os elementos de $\mathbb{R}^2$ por letras minúsculas do final do alfabeto latino, como u, v, w etc. e os escalares reais com letras minúsculas do alfabeto grego, como α, β, γ, λ etc.

As operações que acabamos de definir tem as seguintes propriedades:

Adição

A1) $u + (v + w) = (u + v) + w$. Associativa.

A2) $u + 0 = 0 + u = u$, onde $0 = (0, 0)$. Existência do elemento neutro.

A3) Para cada u, existe um $(-u)$ tal que $u + (-u) = 0$, onde se $u = (x, y)$, $-u = (-x, -y)$. Existência do oposto.

A4) $u + v = v + u$. Comutativa.

Multiplicação por escalar

M1) $\lambda(\alpha u) = (\lambda\alpha)u$. Associativa.

M2) $1u = u$. Ação da identidade.

D1) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$. Distributiva.

D2) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$. Distributiva.

Cada propriedade acima deve ser demonstrada.

Tomemos, como exemplo a (A1). Sejam

$u = (x, y) \quad v = (x_2, y_2) \quad \text{e} \quad w = (x_3, y_3)$

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = \\ &= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3\,,\, y_2 + y_3) = (x_1 + (x_2 + x_3)\,,\, y_1 + (y_2 + y_3)) = \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3\,,\, (y_1 + y_2) + y_3) = (x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2) + (x_3\,,\, y_3) = \\ &= ((x_1\,,\, y_1) + (x_2\,,\, y_2)) + (x_3, y_3) = (u + v) + w\,. \end{aligned}$$

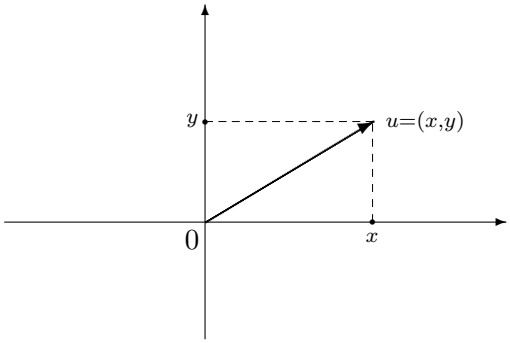
Tomemos agora a (M1):

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha u) &= \lambda(\alpha(x_1, y_1)) = \lambda(\alpha x_1, \alpha y_1) = \\ &= (\lambda(\alpha x_1)\,,\, \lambda(\alpha y_1)) = ((\lambda\alpha)x_1\,,\, (\lambda\alpha)y_1) = \\ &= (\lambda\alpha)(x_1, y_1) = (\lambda\alpha)u\,. \end{aligned}$$

As demais propriedades ficam para o leitor demonstrar, como exercício.

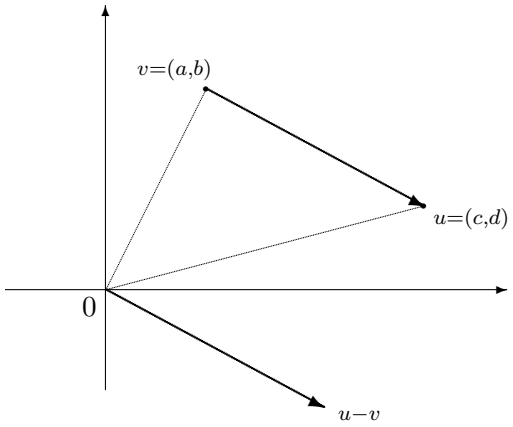
O plano $\mathbb{R}^2$, agora munido destas duas operações, que tem as propriedades acima é um exemplo do que chamamos de espaço vetorial e seus elementos serão chamados

de vetores. Como o vetor nulo $0 = (0, 0)$ é um vetor especial e representa um ponto especial do plano, a que chamamos de origem, quando damos um vetor $u = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, juntamente com a origem 0 temos um segmento que vai de 0 a u, nesta ordem



Assim, a cada elemento (vetor) de $\mathbb{R}^2$, corresponde um segmento orientado, de origem 0 e extremidade u.

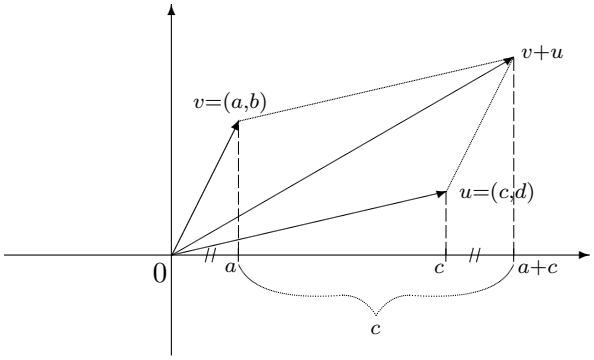
Dois pontos quaisquer $v = (a, b)$ e $u = (c, d)$ do plano $\mathbb{R}^2$ representam também um segmento orientado que começa em v e termina em u.



Este segmento orientado nada mais é do que o vetor $u - v = (c - a\,,\, d - b)$, com origem em 0 e extremidade em $u - v$, como na figura acima. So que ao invés de

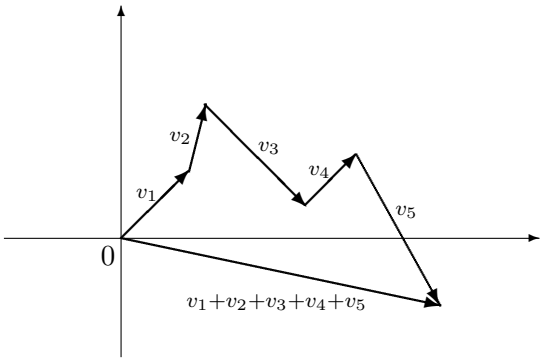
estar "aplicado"em 0, está "aplicado"em v.

Interpretação geométrica da adição de dois vetores $v = (a, b)$ e $u = (c, d)$, $v+u = (a + c, b + d)$.



Observe que quando fazemos a soma $a + c$ obtemos a primeira coordenada de $v+u$ que, pela forma acima, é também a primeira coordenada do vetor que é a diagonal do paralelograma de vértices 0, v, $u+v$, u. Se quisermos, podemos também ver $v + u$ como o terceiro lado do triângulo que tem dois lados iguais a v e u justaposto a v i.e., extremidade de v coincidindo com origem de u.

Para somarmos então um grupo finito de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (a partir da origem) basta que façamos este tipo de justaposição, extremidade de um com a origem do outro e chegaremos ao resultado da soma que é o vetor que vai da origem do primeiro à extremidade do último. Como a adição é comutativa e associativa, o resultado final será o mesmo para qualquer ordem do grupo de vetores.



Mais formalmente, podemos definir em $\mathbb{R}^2$ uma transformação muito importante chamada de translação (segundo um vetor fixado) assim

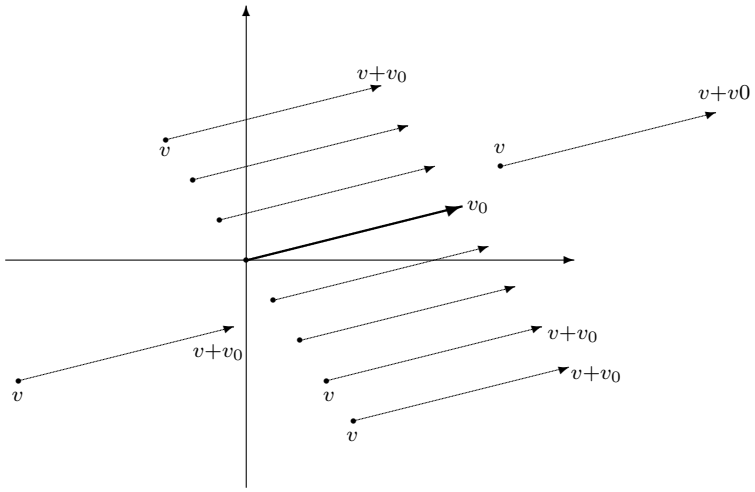
Definição 1.1.3. *Fixemos um vetor qualquer $v_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$. A partir disto definimos translação*

$$\begin{aligned} \tau \quad : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & v \longrightarrow \tau(v) = v + v_0 \end{aligned}$$

Em coordenadas, se $v = (x, y)$ é genérico

$$\tau(v) = v + v_0 = (x, y) + (x_0, y_0) = (x + x_0\,,\, y + y_0)$$

τ é então uma função de variável v de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Ela pega cada ponto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ e translada segundo o mesmo vetor (x_0, y_0), como na figura abaixo.



O plano todo $\mathbb{R}^2$ se move na direção, no sentido e de uma distância igual ao comprimento do vetor v_0 .

Usamos aqui os termos distância, comprimento de vetor. Para podermos usar tais conceitos há a necessidade de definirmos os mesmos. Para isto, vamos munir o $\mathbb{R}^2$ de mais um elemento que é

Definição 1.1.4. *O produto escalar (ou interno) de dois vetores de* $\mathbb{R}^2$ *é uma função de pares de vetores de* $\mathbb{R}^2$ *com valores em* $\mathbb{R}$ *assim denotada: para* $u = (a, b)$ *e* $y = (x, y)$.

$$\begin{aligned} \langle\, ;\, \rangle \quad : \quad & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u, v) \longmapsto \langle u, v\rangle = ax + by \end{aligned}$$

Tal produto escalar tem as seguintes propriedades:

E1) $\langle u + u'\,,\, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$. Aditiva.

E2) $\langle \lambda u\,,\, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$. Homogênea.

E3) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$. Simétrica.

E4) $\langle u, u\rangle \geq 0$. Positiva.

E5) $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$. Definida.

Verifiquemos a E1:

Sejam $u = (a, b)$, $u' = (a', b')$ e $v = (x, y)$

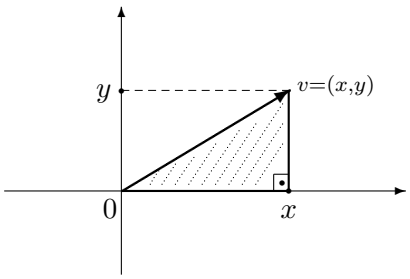
$$\begin{aligned}\langle u + u' , v\rangle &= \langle (a + a' , b + b') , (x, y)\rangle = \\ &= (a + a')x + (b + b')y = ax + a'x + by + by' = \\ &= (ax + by) + (a'x + by') = \langle u, v\rangle + \langle v', y\rangle \text{ como queremos.}\end{aligned}$$

As demais propriedades deixaremos como exercícios para o leitor. O procedimento é análogo e direto.

Definição 1.1.5. *De posse do produto escalar, podemos definir comprimento (ou módulo) de um vetor genérico assim denotado* $\|v\|$ *para* $v = (x, y)$.

$$\begin{aligned}\| \ \| \ : \ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|v\| = \langle v, v\rangle^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Tal definição respeita o Teorema de Pitágoras.



O triângulo retângulo, em destaque, tem catetos x e y e sua hipotenusa, segundo o Teorema de Pitágoras é $\sqrt{x^2 + y^2}$. A nossa definição de comprimento ou norma de um vetor genéico $v = (x, y)$ tem a mesma expressão.

O produto escalar, nos permite definir mais conceitos.

Definição 1.1.6. *Dois vetores u e v de $\mathbb{R}^2$ são perpendiculares (ou ortogonais) se e só se $\langle u, v\rangle = 0$.*

Pares de vetores, um de cada eixo x e y são ortogonais. Um v do eixo x tem coordenadas $v = (x, 0)$ e um u do eixo y tem coordenadas $(0, y)$.

Assim

$$\langle v, u\rangle = x \cdot 0 + 0y = 0 + 0 = 0$$

e são então ortogonais (ou perpendiculares).

Para um vetor genérico $v = (a, b)$ podemos obter um outro u que lhe é ortogonal, tomando $u = (-b, a)$ pois

$$\langle v, u\rangle = \langle (a, b)\,,\, (-b, a)\rangle = -ab + ba = 0$$

O que fizemos aqui foi de fato definirmos uma função muito especial de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ para $v = (a, b)$

$$\begin{aligned} \pi \quad : \quad & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v \longmapsto \pi(v) = (-b, a) \end{aligned}$$

em que $\langle v\,,\, \pi(v)\rangle = 0$ para cada $v = \mathbb{R}^2$.

Temos Também a escolha do negativo de π , pois

$$0 = \langle v\,,\, \pi(v)\rangle = -\langle v\,,\, \pi(v)\rangle = \langle v\,,\, -\pi(v)\rangle - \pi(v) = (b, -a) \quad \text{para} \quad v = (a, b)\,.$$

Ambas as escolhas tem a propriedade de perpendicularidade, mas daremos preferência à primeira $\pi(a, b) = (-b, a)$.

Podemos definir agora a distância entre dois pontos de $\mathbb{R}^2$, digamos u e v, assim:

Definição 1.1.7. *Dados u e v de $\mathbb{R}^2$, a distância entre u e v é dada por*

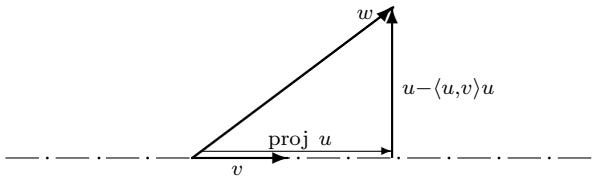
$$d(u, v) = \|u - v\|$$

A distância é assim, uma função dos pares de vetores de $\mathbb{R}^2$ com valores em $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} d \;\; : \;\; & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u, v) \;\longmapsto\; d(u, v) = \|u - v\| \end{aligned}$$

O produto escalar nos permite realizar uma operação muito imortante com dois vetores numa ordem dada. Dados u e v de $\mathbb{R}^2$, queremos achar a projeção ortogonal do vetor u na reta que contém o vetor v, para tal devemos ter $v \neq 0$.

1.2 Projeção

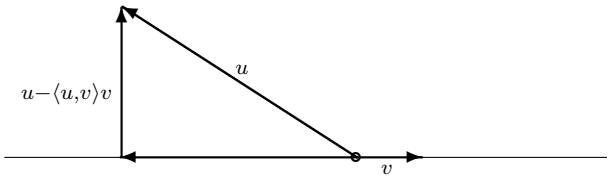


Vejamos o caso particular em que v tem norma 1, $\|v\| = 1$.

Neste caso afirmamos que a projeção ortogonal de u na reta por v é

$$\text{proj}(u) = \langle u, v\rangle v$$

ou seja $\langle u, v\rangle$ já dá o valor numérico do comprimento da projeção proj(u), que será positivo se a projeção cair na semireta positiva (que tem o mesmo sentido de v) e será negativa caso contrário.



Para mostrarmos que $\text{proj}(u) = \langle u, v\rangle v$, basta mostrarmos que o vetor diferença $u - \langle u, v\rangle v$ é perpendicular a v, ou seja, que o produto escalar deste por v é nulo. Vejamos:

$\langle u - \langle u, v\rangle v\,,\, v\rangle = \langle u, v\rangle - \langle \langle u, v\rangle v\,,\, v\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle\ \langle v, v\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle\ 1 = 0$ pois $\langle v, v\rangle = \|v\|^2 = 1^2 = 1$.

Agora, o caso em que $v \neq 0$ é qualquer.

Tomamos o vetor auxiliar $v' = v/_{\|v\|}$ e temos $\|v'\| = 1$.

A reta que passa por v é a mesma que passa por v' portanto a projeção ortogonal de u em tal reta é

$$\text{proj}(u) = \langle u, v'\rangle v' \ \text{ ou}$$

$$\text{proj}(u) = \langle u\,,\, \frac{v}{\|v\|}\rangle\ \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\ v \ \text{ ou}$$

$$\text{proj}(u) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\ v\ .$$

1.3 Desigualdade de Schwarz

Num triângulo retângulo de hipotenuza h e catetos a e b, o Teorema de Pitágoras diz que

$$h^2 = a^2 + b^2$$

donde concluímos que $h \geq a$ e $h \geq b$, pois caso contrário a igualdade acima não poderia ser verdadeira.

Quando projetamos ortogonalmente um vetor u numa reta por v, o vetor u é a hipotenusa de um triângulo retângulo que tem $\text{proj}(u)$ como um dos catetos e para $\|v\| = 1$ tiramos que

$$\|\langle u, v\rangle v\| = |\langle u, v\rangle|\ \|v\| = |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\ .$$

Proposição 1.3.1 (desigualdade de Schwarz). *Para u e v de $\mathbb{R}^2$ quaisquer, vale:*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\ \|v\|$$

Demonstração: Se u ou v for nulo temos $0 \leq 0$ vale, para $u \neq 0$ e $v \neq 0$ consideramos os comentários acima e podemos escrever

$$\left|\langle u\,,\ \frac{v}{\|v\|}\rangle\right| \leq \|u\|\ ,\quad \text{já que}\quad \frac{v}{\|v\|}\quad \text{tem norma}\ \ 1$$

Daí tiramos que

$$\left|\langle u\,,\ \frac{v}{\|v\|}\rangle\right| = \frac{1}{\|v\|}\ \ |\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \quad \text{e}$$

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|\ ,\quad \text{como queríamos.}$$

Exercícios:

1. Verifique as seguintes propriedades para a norma.

   i) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$

   ii) $\|\lambda v\| = |\lambda|\ \|v\|$

   iii) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

   (em (iii) use a desigualdade de Schwarz tome $\|u+v\|^2 = \langle u+v\,,\,u+v\rangle$ e observe que $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\ \|v\| \Longrightarrow \langle u,v\rangle \leq \|u\|\ \|v\|$)

2. Verifique as seguintes propriedades da distância $d(u,v) = \|u-v\|$.

   i) $d(u,v) \geq 0$ e $d(u,v) = 0 \iff u = v$

   ii) $d(u,v) = d(v,u)$ simetria

   iii) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ desigualdade triangular.

3. Prove os ítens abaixo no $\mathbb{R}^2$

   a) $-(-v) = v$

   b) $u+v = u+w \Longrightarrow v = w$

   c) $\lambda v = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ ou $v = 0$

d) $(-1)v = -v$

e) $(-\lambda)v = \lambda(-v) = -(\lambda v)$

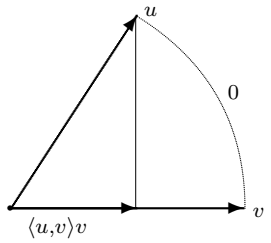
f) $v = -v \Longrightarrow v = 0$

1.3.1 Ângulo entre dois vetores

O produto escalar que introduzimos nos permite definir ângulo entre dois vetores não nulos, assim:

Suponhamos, pimeiramente u e v com $\|u\| = \|v\| = 1$.

Neste caso sabemos que $\langle u, v\rangle v$ é o vetor projeção, proj(u), de u na reta por v. Pela desigualdade de Schwartz temos que $|\langle u, v\rangle| \leq 1$ e assim estamos numa situação como na figura seguinte:



Ora, o valor numérico $\langle u, v\rangle$ nada mais é do que o cosseno do ângulo θ, que queremos definir. Supondo a limitação de que θ fique entre 0 e π, o $\cos\theta$ especifica θ univocamente e no caso em que u e v sejam quaisquer e não nulos, pomos:

Definição 1.3.2. *Dados u e v de $\mathbb{R}^2$, não nulos, o ângulo θ entre u e v é aquele entre 0 e π que satisfaz a igualdade*

$$\cos\theta = \left\langle \frac{u}{\|v\|}, \frac{v}{\|y\|} \right\rangle .$$

Observe que $\dfrac{u}{\|u\|}$ e $\dfrac{v}{\|v\|}$ tem norma 1 como no comentário acima.

Nossa abordagem da Geometria Analítica privilegia as transformações do plano.

Nós já introduzimos as transformações do plano $\mathbb{R}^2$ as que chamamos de translações, i.é, fixado um vetor $v_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$, pomos

$$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \tau(v) = v + v_0$$

e a chamamos de translação segundo o vetor v_0.

Esta desloca o plano todo de uma distância $\|v_0\|$ na mesma direção e sentido do vetor v_0. Temos agora, em $\mathbb{R}^2$, a noção de distância $d(u, v) = \|u - v\|$.

Verifiquemos que as translações tem a propriedade muito especial de preservar as distâncias, i.e., se $\tau(v) = v + v_0$ então

$$d(\tau(u),\ \tau(v)) = d(u, v)$$

para quaisquer u e v de $\mathbb{R}^2$. De fato:

$$d(\tau(u),\ \tau(v)) = \|\tau(u) - \tau(v)\| = \|u + v_0 - (v + v_0)\| = \|u + v_0 - v - v_0\| = \|u - v\| = d(u, v)\,.$$

As transformações do plano que tem a propriedade de preservar distâncias como as translações, são muito importantes e por isso merecem a

Definição 1.3.3. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função. Dizemos que f é uma isometria (do plano) se e só se*

$$d(f(u)\,,\ f(v) = d(u, v)$$

para quaisquer u e v de $\mathbb{R}^2$.

As isometrias são também chamadas de movimentos rígidos. Elas dão a idéia de que o plano se "move"(se transforma) como um todo, sem sofrer deformações.

Uma transformação trivial do plano é a chamada de identidade e que denotamos por $\mathbb{1}$.

$$\mathbb{1} \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{1}\ (v) = v \quad \text{para todo} \quad v \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^2\ .$$

Ela é evidentemente uma isometria, a isometria trivial. Podemos vê-la também como a translação segundo o vetor nulo. $\mathbb{1}\ (v) = v = v + 0$.

Para conhecermos mais transformações importantes, do plano $\mathbb{R}^2$, vamos introduzir o conceito de aplicação linear.

Capítulo 2

Aplicações lineares

Definição 2.0.4. *Uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dita uma aplicação linear (ou apenas linear) se ela satisfaz as duas condições:*

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$ *aditiva*
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ *homogênea*

para quaisquer u e v de $\mathbb{R}^2$ e λ de $\mathbb{R}$.

Exemplos:

1. $\mathbb{1}_{\mathbb{L}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a identidade.
2. $0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicação nula $0(x) = 0$.
3. $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $p(x, y) = (x, 0)$ projeção.
4. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $L(x, y) = (x + y\,,\, x - y)$.
5. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $L(x, y) = (ax + cy\,,\, bx + dy)$
   com $a\,,\, b\,,\, c\,,\, d$ constantes reais.

Exercício:

Verifique que cada exemplo acima é de fato linear.

As aplicações lineares tem uma propriedade muito especial, a saber:

Proposição 2.0.5. *Uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fica univocamente determinada pelos seus valores nos dois vetores $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, i.e., conhecidos $L(e_1)$ e $L(e_2)$ podemos escrever $L(x, y)$ explicitamente.*

Demonstração: Qualquer $v = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como

$$v = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2 \, .$$

Pelas duas condições de linearidade de L temos:

$$L(v) = L(x, y) = L(xe_1 + ye_2) = L(xe_1) + L(ye_2) = xL(e_1) + yL(e_2)$$

e portanto, conhecidos $L(x_1)$ e $L(e_2)$, para cada (x, y) dado, temos

$$L(x, y) = xL(e_1) + yL(e_2)$$

determinado, como queríamos.

Por causa desta propriedade especial, estabelecida pela proposição acima, pomos:

Definição 2.0.6. *Dada uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, chamamos de matriz de L, denotada por $[L]$ à matriz 2×2 cuja primeira coluna é $L(e_1)$ e a segunda $L(e_2)$.*

Então se $L(e_1) = (a, b)$ e $L(e_2) = (c, d)$

$$[L] = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} .$$

Reciprocamente, qualquer matriz real 2×2, como acima, define uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$. Se a matriz é $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ a aplicação é:

$$\Lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\Lambda(x, y) = x(a, b) + y(c, d) = (xa + yc \, , \, xb + yd)$$

que denotamos também assim

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + yc \\ xb + yd \end{pmatrix}$$

em forma de colunas.

Observe que a primeira coordenada de $\Lambda(x, y)$ é o produto escalar de (x, y) pela primeira linha da matriz 2×2 e a segunda coordenada de $\Lambda(x, y)$ é o produto escalar de (x, y) pela segunda linha da mesma matriz.

Exercícios:

1. As funções abaixo, de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, são lineares, calcule suas matrizes

   a) $L(x, y) = (2x + 3y\,,\, x - y)$

   b) $L(x, y) = (5x - 7y\,,\, 3x + 2y)$

   c) $L(x, y) = (x - 4y\,,\, 3x - 4y)$

2. Aplique as matrizes abaixo ao vetor (3,2)

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

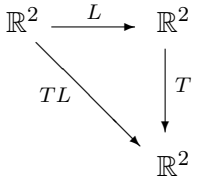
3. Dada uma matriz 2×2 qualquer $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Prove que a aplicação $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

   $$L(x, y) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

   é linear.

Definição 2.0.7. *Podemos fazer composição de aplicações lineares. Sejam $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ duas aplicações lineares a composição de L com T, nesta ordem é a função $TL : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por*

$$TL(v) = T(L(v))$$



Exercício: Mostre que a composta TL é também linear.

Se $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é aplicação linear, temos associado a R sua matriz $[R]$, como definida logo acima. Por sua vez a matriz 2×2 $[R]$ define uma aplicação linear, como no exercício (3) acima. Verifique que a aplicação R e aquela dada pela sua matriz, são iguais.

Vejamos o que acontece com a matriz de uma composição TL de duas transformações lineares.

Sejam $[T] = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ e $[L] = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

TL terá uma matriz $[TL]$.

A primeira coluna de $[TL]$ é o vetor $TL(e_1) = T(L(e_1))$, mas $L(e_1)$ é a primeira coluna de $[L]$. Então para determinaar $TL(e_1)$ aplicamos a matriz de T na primeira coluna de $[L]$. Procedemos igualmente com a segunda coluna. Assim em notação matricial temos:

$$[T] = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \qquad [L] = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

e a primeira coluna de $[TL]$ é

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, numericamente, digamos que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Assim a matriz de $[TL]$ terá para primeira coluna

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

e para segunda coluna

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

isto é

$$[TL] = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Assim como temos uma composição de aplicações lineares (que poderíamos chamar de multiplicação), este procedimento acima nos está dando uma forma de multiplicar duas matrizes 2×2.

Portanto

Definição 2.0.8. *Dadas as matrizes* 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ *a multiplicação de A por B (nesta ordem) é dada por*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & a\gamma + c\delta \\ b\gamma + d\delta & b\gamma + d\delta \end{pmatrix} .$$

Exercício: Multiplique as matrizes abaixo pela matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

Dadas duas matrizes A e B 2×2 denotamos a multiplicação das mesmas, nesta ordem, fazendo justaposição

$$AB = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & a\gamma + c\delta \\ b\alpha + d\beta & b\gamma + d\delta \end{pmatrix} .$$

Então temos o conjunto das aplicações lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, que denotamos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, onde está definida uma composição entre cada dois de seus elementos e por outro lado temos o conjunto das matrizes 2×2 (reais) que denotamos por M_2. A passagem de uma L em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ para $[L]$ em M_2 está definindo uma função

$$\begin{array}{rccc} [\ ] : \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & M_2 \\ L & \longmapsto & [L] \end{array} .$$

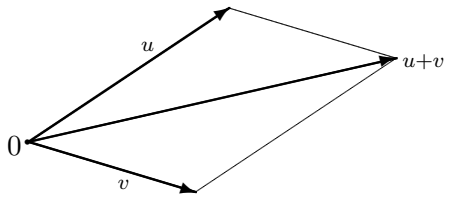
Com a definição que demos de multiplicação de matrizes, esta função tem a propriedade

$$[TL] = [T]\,[L]\,.$$

Recordando, a definição de aplicações lineares, uma tal Λ deve satisfazer

1. $\Lambda(u + v) = \Lambda(u) + \Lambda(v)$
2. $\Lambda(\lambda a) = \lambda\,\Lambda(u)$

Já vimos que a interpretação geométrica da soma de dois vetores u e v é dada pela diagonal do paralelograma de lados u e v.



Assim sendo, se uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva paralelograma em paralelograma e deixa a origem fixa, $f(0) = 0$, então f é aditiva

$$f(u + v) = f(u) + f(v)$$

Agora a condição chamada de homogênea $f(\lambda\, u) = \lambda f(u)$ está dizendo que f preserva a razão entre vetores u e λu dando a mesma razão λ entre $f(u)$ e $\lambda f(u)$.

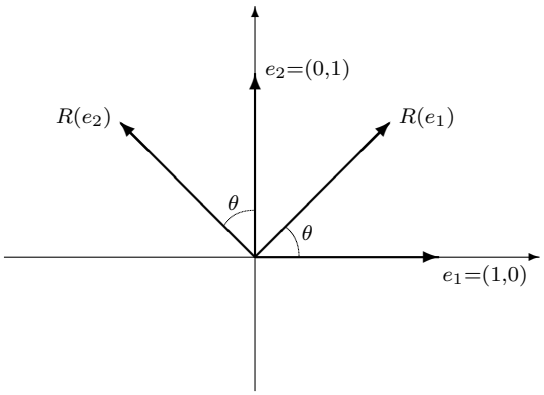
Tiramos destes comentários simples o seguinte fato, que nos interessa: se uma isometria (movimento rígido) do plano $\mathbb{R}^2$, deixa a origem fixa, então ela é linear, pois é aditiva e homogêneo obviamente.

2.1 Rotação

Assim sendo a rotação com centro na origem 0 e de um ângulo genérico θ é linear e sendo linear tem sua matriz

$$R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

é a rotação de ângulo θ e centro 0. Calculemos sua matriz. Para conhecermos sua matriz basta calcularmos as coordenadas de $R(e_1) = R(1, 0)$ e $R(e_2) = R(0, 1)$. Veja figura a seguir



Os vetores e_1 , e_2 tem norma 1, assim como $R(e_1)$ e $R(e_2)$, pois R é rotação.

Tiramos da figura acima que as coordenadas são

$$R(e_1) = (\cos\theta\,,\,\text{sen}\;\theta) \quad \text{e}$$

$$R(e_2) = (-\text{sen}\;\theta\,,\,\cos\theta)$$

Então a matriz da rotação genérica R é

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\;\theta \\ \text{sen}\;\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Se quisermos agora a expressão analítica de R, basta aplicarmos sua matriz a um vetor genérico (x, y), assim,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\;\theta \\ \text{sen}\;\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\,\text{sen}\;\theta \\ x\,\text{sen}\;\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

ou seja

$$R(x, y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\;\theta\,,\; x\,\text{sen}\;\theta + y\cos\theta)\,.$$

2.2 Retas no plano $\mathbb{R}^2$

Definição 2.2.1. *Dados um vetor $u = (a, b)$ não nulo e um número real c qualquer, chamamos de reta de raiz u e constante c ao conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$*

$$r(u, c) = \{(x, y)\ /\ ax + by + c = 0\}\ .$$

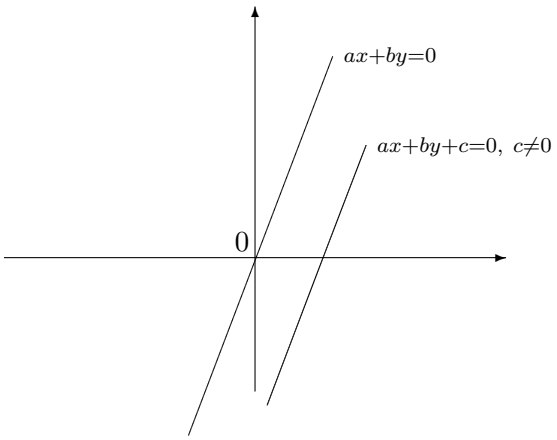
Uma reta de $\mathbb{R}^2$ é então o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que são soluções de uma equação

$$ax + by + c = 0$$

Se $c = 0$ temos a equação

$$ax + by = 0$$

e vemos que $x = y = 0$ é solução desta última equação e portanto a tal reta desta passa pela origem. Veja a figura abaixo



Exercícios:

1. Desenhado um sistema de eixos x e y no papel, esboce os desenhos das retas cujas equações são dadas abaixo:

   a) $x + y = 0$

   b) $x - y = 0$

   c) $2x - y + 1 = 0$

   d) $x + 4y - 1 = 0$

Dada a equação de uma reta

$$i)\ ax + by + c = 0$$

a esta podemos associar outra que é

$$ii)\ ax + by = 0$$

a que chamamos de equação homogênea da anterior. Se $c = 0$ a i) coincide com sua homogênea e as duas retas são coincidentes. Se $c \neq 0$ a duas retas não se encontram

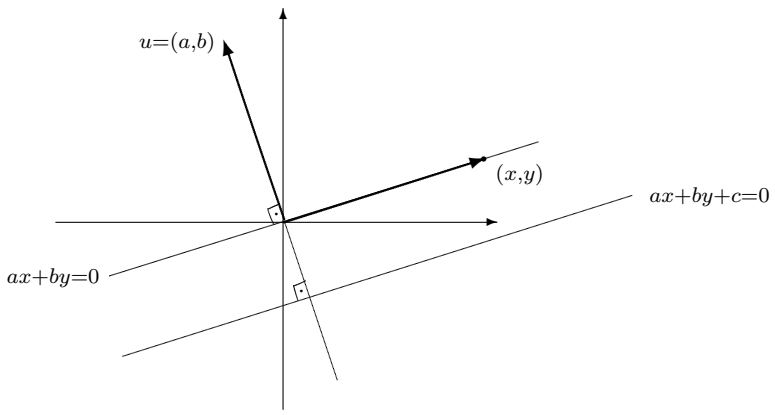
ou sejas, são paralelas.

Consideramos para isto o sistema de duas equações a duas incógnitas

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by = 0 \end{cases}$$

As duas retas se encontram se e somente se este sistema tem, pelo menos, uma solução, isto é, um par (x_0, y_0) que seja solução de ambas. Mas para $c \neq 0$ nenhuma solução de $ax + by = 0$ poderá ser solução de $ax + by + c = 0$, pois a existência de uma tal solução implicaria em $0 + c = 0$ o que não ocorre. Assim, dada uma reta r pela equação $ax + by + c = 0$, teremos sempre uma coincidente (se $c = 0$) ou paralela, dada pela forma homogênea $ax + by = 0$.

Observemos que a expressão $ax + by$ nada mais é do que o produto escalar dos vetores $u = (a, b)$ e $v = (x, y)$. Portanto a equação homogênea $ax + by = 0 = \langle u, v \rangle$ nos diz que o vetor raiz $u = (a, b)$ é perpendicular ao vetor solução $v = (x, y)$. Como na figura abaixo



Se u é perpendicular à reta $ax + by = 0$ é também perpendicular à reta $ax + by + c = 0$. Portanto o vetor raiz $u = (a, b)$ é sempre perpendilcular à reta $ax + by + c = 0$.

Observemos, com atenção, que equações diferentes podem determinarem a mesma

reta, como por exemplo $x + y + 1 = 0$ e $2x + 2y + 2 = 0$, pois qualquer solução da primeira é também solução da segunda que pode ser escrita

$$2(x + y + 1) = 0$$

Se um par (x_0, y_0) anula a primeira, anulará a segunda e vice-versa. O ponto em questão é que uma é múltipla real da outra. De um modo geral, para $\lambda \neq 0$, as equações

$$ax + by + c = 0$$

e

$$\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$$

determinam a mesma reta r.

Mostre, como exercício, a recíproca, i.e, se $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ determinam a mesma reta r, então existe uma constante λ Tal que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ e $c' = \lambda c$. (Sugestão: Faça $y = 0$ em ambas e calcule x, depois faça $x = 0$ e calcule y).

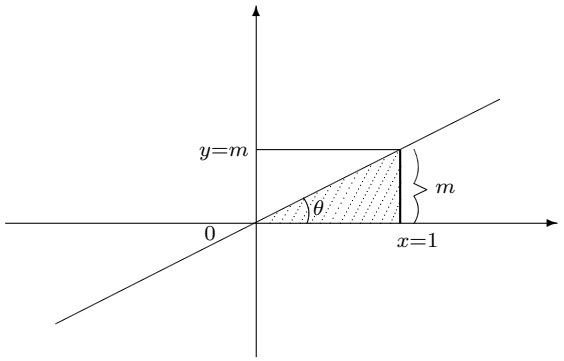
Se na equação $ax + by + c = 0$, b for não nulo, podemos tirar o valor de y e chegaremos à equação

$$y = mx + k$$

onde $m = -\dfrac{a}{b}$ e $k = -\dfrac{c}{b}$.

Nesta forma a reta paralela (se $k \neq 0$) a ela, pela origem, tem a expressão $y = mx$.

Portanto se quisermos conhecer a "inclinação"da reta em relação ao eixo x, basta analisarmos $y = mx$. Esta passa pela origem, já que $0 = m0$ e para $x = 1$ tem $y = m$. Veja a figura abaixo.



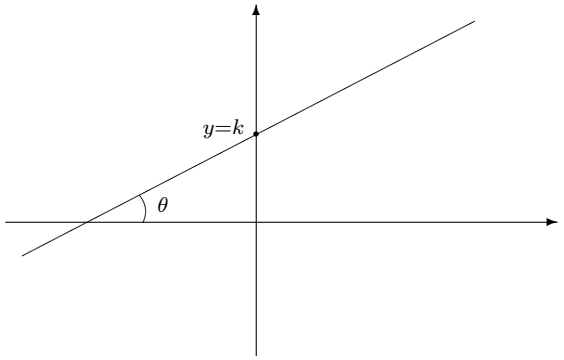
Temos aqui o triângulo retângulo assinalado onde vemos que $m = \dfrac{m}{1}$ é a tangente de θ.

Assim sendo, o coeficiente de x na expressão

$$y = mx + k$$

é a inclinação da reta em relação ao eixo x.

Fazendo $x = 0$ temos $y = k$ que é o ponto do eixo y onde a reta está passando



Exercícios:

1. Dados, o vetor raiz $u = (1, 2)$ da reta r e o ponto $p = (5, 7)$ por onde r passa, achar a equação $ax + by + c = 0$ da reta.

2. Sabendo que o vetor (a, b) é perpendicular ao vetor $(-b, a)$ e dada a reta r pela equação $2x + 3y - 5 = 0$ e o ponto $p = (1, 3)$, achar a equação da reta s perpendicular a r e passando por p.

3. Dada a reta r pela equação $ax + by + c = 0$ verificar que para cada variação c' de c, $c' \neq c$, a reta s dada por $ax + by + c' = 0$ é paralela a r.

As equações da forma $ax + by + c = 0$, que incluem as da forma $y = mx + k$ são chamadas de equações cartesianas das retas. Podemos expressar uma reta em equação que chamamos de paramétrica, onde aparece uma variável escalar ou parâmetro, como abaixo.

A equação paramétrica de uma reta paralela a um vetor v e que passa pelo ponto v_0 é dada por

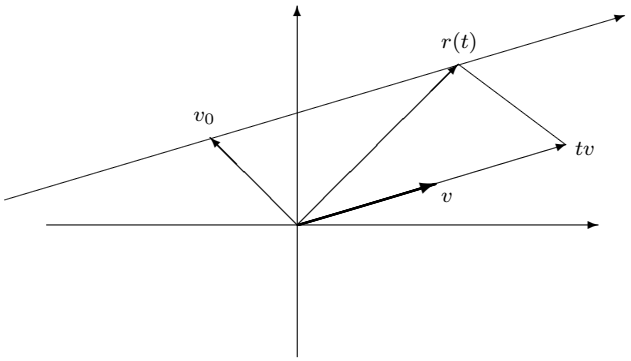
$$r(t) = tv + v_0$$

onde t percorre os reais $\mathbb{R}$. A reta é então o conjunto de pontos

$$r = \{r(t) \ / \ r(t) = tv + v_0 \,, \ t \in \mathbb{R}\}$$

Para $t = 0$ temos o ponto $r(0) = 0v + v_0 = v_0 = v_0$.

Veja a figura a seguir



Chamaremos o vetor v, que dá a direção e o sentido de percurso da reta, de vetor diretor da reta de equação paramétrica $r(t) = tv + v_0$.

Observe que a mesma reta pode ter muitas equações paramétricas. Se v' é múltiplo de v, $v' = \lambda v$ e v'_0 é um ponto qualquer da reta, então

$$r'(t) = tv' + v'_0$$

é outra equação paramétrica da mesma reta. O que muda é a maneira de percorrer a mesma em função do parâmetro. Por exemplo, para $t = 0$, $r(0) = v_0 \neq v'_0 = r'(0)$.

Lembremos que, em $\mathbb{R}^2$, temos uma função, transformação muito oportuna, que é

$$\begin{array}{rcl} V : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & V(a,b) = (-b,a) \end{array}$$

Ela tem a propriedade $\langle u, V(u)\rangle = 0$ para cada u de $\mathbb{R}^2$. Ela é exatamente a rotação de ângulo $\pi/2$ e centro na origem.

Na equação cartesiana de uma reta $ax+by+c = 0$ aparece o vetor raiz $u = (a,b)$ da reta e que é perpendicular à reta. Assim sendo o vetor $V(u)$ será paralelo à mesma reta. Usando este fato, resolva-os.

Exercícios:

1. Dadas as retas, pelas equações cartesianas abaixo, determinar para cada, uma equação paramétrica

   a) $x + y + 1 = 0$ b) $3x - 2y + 5 = 0$ c) $x - 7y + 2 = 0$

2. Dadas as retas, pelas equações paramétricas abaixo, determinar para cada, uma equação cartesiana

   a) $r(t) = t(1, 2) + (3, 4)$ b) $r(t) = t(-1, 1) + (1, 1)$
   c) $r(t) = t(7, 3) + (1, 5)$

3. Dados uma reta $2x - 3y + 4 = 0$ e um ponto $p = (3, -1)$, achar a equação cartesiana da reta perpendicular a estas e que passa pelo ponto p.

4. Dados dois pontos u_0 e v_0 de $\mathbb{R}^2$, ache uma equação paramétrica da reta que passa por estes dois pontos (o vetor $v_0 - u_0$ pode ser tomado como vetor diretor de uma equação paramétrica).

5. Achar, para as retas do exercício (2) as equações na forma $y = mx + k$

2.3 Reflexão

Vejamos agora uma nova transformação do plano $\mathbb{R}^2$, que é uma isometria muito especial: a reflexão segundo uma reta dada.

Definição 2.3.1. *Dada uma reta r de $\mathbb{R}^2$, chamamos de reflexão de eixo r à transformação R assim obtida:*

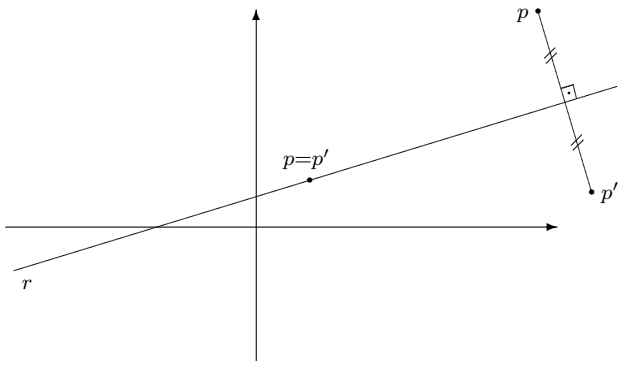
$$\begin{array}{rccc} R & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & p & \longmapsto & R(p) = p' \end{array}$$

Dado p, tomamos por p a perpendicular s a r e p' é determinado pelas seguintes condições:

1. p' está em s e $p = p'$ se p está em r .

2. p' está no semiplano oposto ao de p se p não está em r .

3. A distância de p' a r é igual à de p a r .



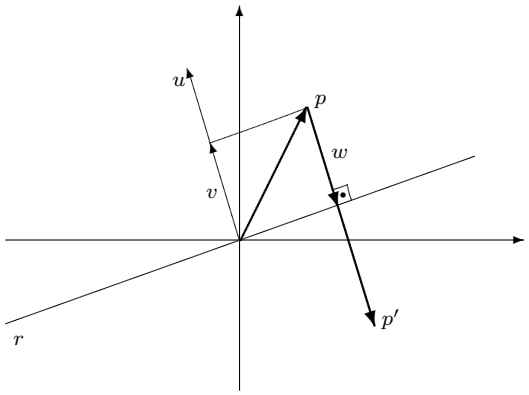
Assim sendo, os pontos p da reta r ficam neles mesmos pela reflexão R de eixo r , $(R(p) = p)$.

Observe que se $p' = R(p)$ então $R(p') = p$, isto é, a composição de R com R dá a transformação a que chamamos de identidade $\mathbb{1}$

$$R\,R(p) = R^2(p) = p = \mathbb{1}\ (p)$$

$$\mathbb{1}\ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \mathbb{1}\ (p) = p \quad \text{para todo } p \text{ de } \mathbb{R}^2.$$

Vamos obter a expressão analítica de uma reflexão de eixo r . Primeiramente vamos considerar a reta r passando pela origem



Uma tal reta tem equação cartesiana $ax + by = 0$ e seu vetor raiz é $u = (a, b)$ e que é perpendicular à mesma. Se nós conhecermos o vetor w, na figura acima, poderemos expressar p' como $p' = p + 2w$.

Tudo se resume, agora, em se achar a expressão para o vetor w. Observemos que w, nada mais é do que o negativo do vetor v que é a projeção ortogonal de p na reta por u. Já vimos como projetar um vetor numa reta por outro e sabemos então que

$$v = \frac{\langle p, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\ u$$

e assim temos a expressão analítica da reflexão de eixo r

$$\begin{aligned} R \ &: \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\quad R(p) = p - 2\frac{\langle p, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\ u \end{aligned}$$

Em coordenadas cartesianas será

$$R(x, y) = (x, y) - 2\frac{ax + by}{a^2 + b^2}(a, b)$$

Em retas especiais, como os eixos x e y ou a bissetriz, a reflexão é bastante simples

$$\begin{aligned}
&\text{No eixo } x \text{ é } \;\; R(x,y) = (x,-y)\\
&\text{No eixo } y \text{ é } \;\; R(x,y) = (-x,y)\\
&\text{Na bissetriz é } \;\; R(x,y) = (y,x)
\end{aligned}$$

Se tomarmos uma reta pela origem, digamos $x - 3y = 0$ a reflexão com este eixo terá a expressão

$$\begin{aligned}
R(x,y) &= (x,y) - 2\,\frac{1x-3y}{10}(2,-3) = (x,y) - \frac{2x-6y}{5}\,,\,\frac{9y-3x}{5} =\\
&= \left(x - \frac{2x-6y}{5}\,,\, y + \frac{3x-9y}{5}\right) = \left(\frac{5x-2x+6y}{5}\,,\,\frac{5y+3x-9y}{5}\right)
\end{aligned}$$

portanto

$$R(x,y) = \left(\frac{3x+6y}{5}\,,\,\frac{3x-4y}{5}\right).$$

A definição de reflexão, que foi dada geometricamente, nos permite dizer que, para um vetor genérico w de $\mathbb{R}^2$, as normas (ou comprimentos) de w e $R(w)$ são iguais

$$\|R(w)\| = \|w\|\,.$$

Usando a expressão analítica vetorial de R

$$R(v) = v - 2\,\frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\;u$$

e as propriedades do produto escalar $\langle\,,\,\rangle$ tiramos, com uma conta, que

$$R(v) - R(v') = R(v-v')\,.$$

Estes elementos nos permite concluir que as reflexões em retas pela origem são isométricas, pois

$$\|R(v) - R(v')\| = \|R(v-v')\| = \|v-v'\|\,.$$

Sendo isometria que deixa origem fixa é também uma aplicação linear e tem portanto sua matriz, que calculamos usando sua forma analítica em coordenadas e

obtemos, para uma reta de equação $ax + by = 0$,

$$R(e_1) = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} \, , \, -2 \, \frac{ab}{a^2 + b^2} \right)$$

$$R(e_2) = \left(-2 \frac{ab}{a^2 + b^2} \, , \, \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

e portanto sua matriz será

$$[R] = \begin{pmatrix} \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} & -2 \dfrac{ab}{a^2 + b^2} \\ \\ -2 \dfrac{ab}{a^2 + b^2} & \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{pmatrix} .$$

Estas contas valem para a e b não nulos.

Se $a = 0$ a reta $ax + by = 0$ terá equação $y = 0$ que é o eixo x e neste caso, como vimos, a reflexão é

$$R(x, y) = (x, -y) \, .$$

como matriz

$$R(e_1) = R(1, 0) = (1, 0)$$

$$R(e_2) = R(0, 1) = (0, -1)$$

e

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Se $b = 0$, $ax + by = 0$ nos dá $x = 0$ que é o eixo y e $R(x, y) = (-x, y)$ com

$$[R] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vejamos, agora, como tratar a reflexão R , em uma reta r , que não passa pela origem 0 . Neste caso o refletido da origem $R(0)$ não coincide com a origem, $R(0) \neq 0$ e portanto, neste caso, R não é uma aplicação linear, pois se fosse linear deveríamos

ter $R(0) = 0$.

Nós vamos usar aqui um procedimento extremamente importante em toda a matemática, conhecido pelo nome de conjugação, que de fato praticamos ou vemos praticado cotidianamente e que, por razões didáticas vamos apelidar de "processo do LEVA FAZ E TRAZ"que encurtamos para LFT.

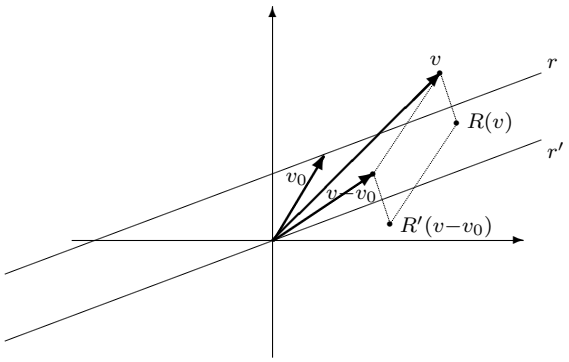
Vejamos em que consiste este processo.

Digamos que a geladeira de sua casa apresenta um defeito. Você chama um técnico, que vem, examina sua geladeira e constata um defeito que ele não tem condições de consertar no local, mas sim em sua oficina, onde possui o equipamento adequado. Então ele LEVA (L) a sua geladeira para onde ele consegue realizar a operação do conserto, ele FAZ (F) o trabalho requerido e em seguida TRAZ (T) de volta para o local anterior. Se você observar a geladeira e o técnico, antes do transporte e apenas no final, terá a impressão que o serviço foi realizado no local da geladeira, em sua casa.

Para todos os efeitos, o que importa é que a geladeira foi consertada, mas para isso o técnico utilizou do "processo LFT". Agora você deve concordar comigo, que este processo é praticado com enorme freqüência em nossa vida diária, nas coisas mais simples.

Vamos aplicá-lo ao nosso caso presente. Sabemos fazer reflexão numa reta que passa pela origem, isto é, sabemos escrever sua expressão analítica e queremos obter uma tal expressão analítica para a reflexão R em uma reta r que não passa pela origem.

Seja a reta r dada por $ax + by + c = 0$ e $c \neq 0$. Sabemos que a reta pela origem r' paralela a r tem equação $ax + by = 0$. Inicialmente, precisamos aplicar uma transformação no plano $\mathbb{R}^2$, a mais simples possível de modo que a reta genérica r vá na reta r' pela origem



Conseguiremos isto com uma translação por um vetor $-v_0$ onde v_0 é um vetor qualquer com extremidade em r , como na figura acima. Designemos por R a reflexão em r e por R' a reflexão em r' .

Dado então um vetor genérico v de $\mathbb{R}^2$, aplicamos a v a translação $v - v_0$, em seguida efetuamos a reflexão por R' e finalmente retornamos com a translação inversa ou oposta usando o vetor v_0 .

$$\begin{array}{ccc} v & \overset{\text{leva}}{\longmapsto} & v - v_0 \\ R \downarrow & & \downarrow R' \quad \text{faz} \\ R'(v - v_0) + v_0 & \underset{\text{traz}}{\longleftarrow} & R'(v - v_0) \end{array}$$

$$R(v) = R'(v - v_0) + v_0 \ .$$

E temos então para expressão de R , analítica, na forma vetorial como sendo:

$$\begin{aligned} R(v) &= v - v_0 - 2\frac{\langle v - v_0 \, , \, u \rangle}{\langle u \, , \, u \rangle} \, u + v_0 \ = \\ &= v - 2\frac{\langle v - v_0 \, , \, u \rangle}{\langle u \, , \, u \rangle} \, u \, , \quad \text{onde} \quad u = (a, b) \end{aligned}$$

e esta é então a reflexão de eixo $ax + by + c = 0$ e v_0 é um vetor qualquer deste eixo. Fazendo $y = 0$ temos $x = -\frac{c}{a}$ e podemos tornar $v_0 = \left(-\frac{c}{a}, 0\right)$, que satisfaz a equação do eixo de reflexão. Como a reflexão em reta pela origem e as translações são isometrias, R também é.

Conhecemos algumas transformações do plano $\mathbb{R}^2$, que são isometrias, a saber:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{1} & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{identidade} \\ & & \mathbb{1}(v) = v & \\ \tau & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{translação} \\ & & \tau(v) = v + v_0 & \\ e & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{rotação de centro na origem} \\ R & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{reflexão em alguma reta} \end{array}$$

A identidade pode ser vista como uma rotação de ângulo nulo ou como uma translação de vetor nulo. Portanto temos, até agora, três tipos de transformações do plano, que são imometrias

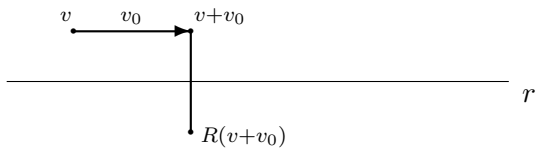
1. Reflexão em retas.

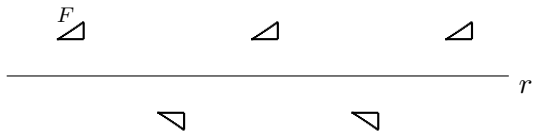
2. Translações.

3. Rotações

2.4 Glide e classificação das isometrias

Há mais um tipo de isometria diferente destas que é quando fazemos a composição de uma translação de vetor $v_0 \neq 0$, com uma reflexão em uma reta r paralela a v_0, digamos $\gamma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \gamma = R\tau$





Se tomarmos uma figura, como o triângulo F acima e aplicarmos a F a isometria γ repetidamente, obteremos um padrão como mostra esta figura. O que vemos aí não é nem uma translação, nem uma reflexão e nem uma rotação. Uma nova isometria deste tipo é denominada de reflexão deslizante. Na lingua inglesa ela é chamada de glide (leia-se glaide) e adotaremos este nome por ser mais curto. Temos então os quatro tipos abaixo de isometrias do plano $\mathbb{R}^2$

1. Reflexão
2. Translação
3. Rotação
4. Glide

Estes são todos os tipos possíveis de isometrias de $\mathbb{R}^2$. Este fato não será demonstrado.

Há uma isometria muito simples do plano, que é

$$\begin{array}{rccl} \alpha & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & v & \longmapsto & \alpha(v) = -v \end{array}$$

a que chamamos de antípodal. Ela é isometria pois

$$\|\alpha(v) - \alpha(u)\| = \| - v - (-u)\| = \|u - v\| = \|v - u\| \ .$$

Esta se enquadra numa das quatro que acabamos de listar. Esta é, de fato, uma rotação de centro 0 e ângulo π . Uma tal rotação e tem matriz

$$[e] = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\text{sen }\pi \\ \text{sen }\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

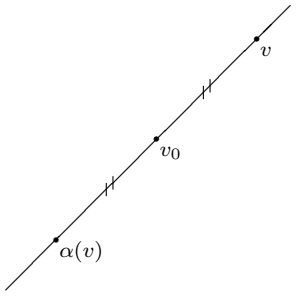
$$[e] = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

$$-\mathbb{1}\ (v) = -v\,.$$

Esta antipodal é centrada na origem. Podemos definir uma antipodal centrada num ponto v_0 qualquer.

$$\begin{array}{rccc} \alpha\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & v & \longmapsto & \alpha_{v_0}(v) \end{array}$$

$\alpha_{v_0}(v)$ é o ponto da reta por v_0 e v , oposto a v em relação a v_0



Obs. Veja que o ponto v_0 é o ponto médio do segmento que vai de v até $\alpha(v)$.

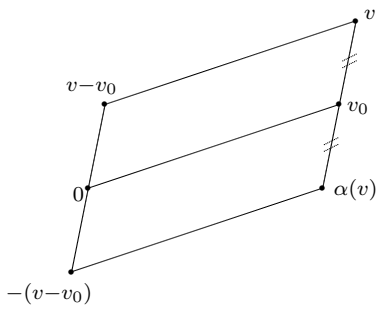
Como é a expressão analítica vetorial desta antipodal centrada num ponto $v_0 \neq 0$?

Usamos aqui novamente o processo LFT (leva, faz e traz).

Transladamos o plano $\mathbb{R}^2$ pelo vetor $-v_0$, em seguida aplicamos a antipodal centrada na origem 0 e voltamos pela translação de vetor v_0, assim

$$\begin{array}{ccc} v & \longmapsto & v - v_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ v_0 - v + v_0 = 2v_0 - v & \longleftarrow & -(v - v_0) = v_0 - v \end{array}$$

$$\alpha_{v_0}(v) = 2v_0 - v$$



Exercícios:

1. O segmento de reta de extremidade u e v é dado parametricamente por

$$tu + (1 - t)v$$

com $0 \leq t \leq 1$.

Mostre que o ponto médio deste corresponde ao parâmetro $t = \dfrac{1}{2}$.

Solução: Usando a noção de transformação antipodal vemos que o ponto médio de tal segmento, digamos m é tal que a antipodal centrada em m,

permuta os pontos u e v. Então para mostrar que $m = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$, basta calcular a antipodal centradas em $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ e ver que esta permuta u com v. Assim, seja

$\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a antipodal centrada em $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$ e calculemos $\alpha(u)$ e $\alpha(x)$.

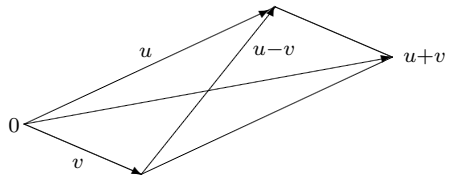
$$\alpha(u) = 2\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) - u = u + v - u = v$$

$$\alpha(v) = 2\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right) - v = u + v - v = u$$

e α permuta u e v, sendo então $\frac{1}{2}(u+v)$ o ponto médio do segmento em questão.

2. Mostre que as diagonais de um paralelograma se cortam no ponto médio das mesmas.

   Sugestão: Sem perda de generalidade, pode supor que o paralelograma tem um dos vértices na origem 0, os outros dois adjacentes sendo os vetores u e v, o quarto vértice é $u + v$. Use o exercício 1 finalmente.



3. Dados dois vetores $u \neq 0$ e $v \neq 0$ achar a equação paramétrica da reta bissetriz do ângulo entre u e v.

   Solução: Se u e v tiverem a mesma norma $\|u\| = \|v\|$, v vetor $u + v$ será a diagonal do paralelograma, que é um losango e portanto faz ângulos iguais

com u e com v, sendo assim um vetor diretor da bissetriz que tem equação paramétrica

$$b(t) = t(u+v) \ .$$

Se $\|u\| \neq \|v\|$ passamos para os vetores de norma 1

$$u' = \frac{u}{\|u\|} \quad \text{e} \quad v' = \frac{v}{\|v\|} \ .$$

O ângulo entre u e v é o mesmo que o ângulo entre u' e v'; como estes tem a mesma norma 1 temos, pelo caso anterior que a bissetriz é

$$b(t) = t\left(\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}\right) \ .$$

4. Dadas as retas $r(t) = tv + v_0$ e $s(t) = tw + v_0$, achar a equação paramétrica da reta bissetriz do ângulo determinado por r e s. Observe que ambos passam pelo ponto v_0, $v_0 = r(0) = s(0)$ (use o processo LFT e o ex.(3)).

5. O segmento de reta de extremidade u e v é dado, parametricamente por $tu + (1-t)v$ com $0 \leq r \leq 1$. Para $t = 0$ temos a extremidade v e para $t = 1$ temos u. Mostre que o ponto $p_t = tu + (t-1)v$ divide o segmento de v a u na mesma razão que t divide o segmento $[0,1]$ de $\mathbb{R}$. (calcule $\dfrac{\|p_t - u\|}{\|p_t - v\|}$ e obterá $\dfrac{t}{1-t}$).

6. Dados os pontos u e v do plano $\mathbb{R}^2$, $u \neq v$ temos o segmento de reta $[u,v]$ parametrizado como anteriormente por $p = tu + (1-t)v$, com t no intervalo $[0,1]$. Damos uma razão $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$ e $\lambda_1 < \lambda_2$, pedimos para você determinar o ponto p_t de $[u,v]$ que divida tal segmento na razão dada. (você deve determinar qual o valor do parâmetro t para que p_t divida $[u,v]$ na razão $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Use o exercício (5).

Proposição 2.4.1. *Uma aplicação linear qualquer $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva*

i) retas em retas.

ii) retas paralelas em retas paralelas ou coincidentes

iii) retas concorrentes em retas concorrentes

Demonstração:

i) Seja a reta r dada por $r(t) = tv + v_0$ onde t é o parâmetro real e v e v_0 são vetores fixados. r passa então por v_0 e tem vetor diretor r . Aplicando L a r Obtemos

$$L(r(t)) = tL(v) + L(v_0)$$

onde $L(v) + L(v_0)$ são constantes e t é o parâmetro e portanto $L(r)$ é uma reta que passa por $L(v_0)$ e tem vetor diretor $L(v)$.

ii) um par de retas paralelas (ou coincidentes) tem equações com o mesmo vetor direção, como:

$$r(t) = tv + v_0 \qquad \text{e}$$
$$s(t) = tv + w_0 \ .$$

Aplicando L a ambas obtemos duas retas

$$L(r(t)) = tL(v) + L(v_0) \qquad \text{e}$$
$$L(s(t)) = tL(v) + L(w_0) \ .$$

Como ambas tem o mesmo vetor direção estas são também paralelas, ou coincidentes.

iii) Se duas retas r e s tem um ponto u_0 em comum (são concorrentes) então $L(r)$ e $L(s)$ terão $L(u_0)$ em comum e portanto são também concorrentes, como queríamos.

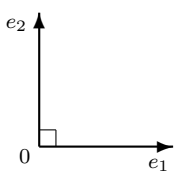
Observe porém que uma aplicação linear genérica não preserva, necessariamente, nem comprimento de segmento e nem ângulo. Por exemplo a aplicação linear L que tem matriz

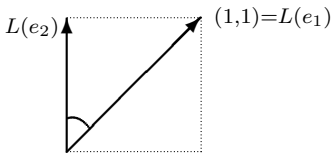
$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é tal que

$$L(1,0) = (1,1) \quad \text{e} \quad L(0,1) = (0,1)\ .$$

Os vetores $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ tem comprimento 1 e são perpendiculares, $\langle e_1\ ,\ e_2\rangle = 0$, mas $L(e_1) = (1,1)$ tem comprimento $\sqrt{2}$ e este faz com $L(e_2) = (0,1)$ um ângulo de 45^0





2.5 Inversa de uma aplicação linear

Dada uma função $f : A \to B$ com domínio A e codomínio B, ela admitirá a função que é sua inversa, se e somente se f é simultaneamente biunívoca (injetora) e sobrejetora, ou seja se f satisfaz as duas seguintes condições

a) (biunívoca) $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$

b) (sobrejetora) Para qualquer y de B, existe x de A tal que $f(x) = y$. No caso de f ser biunívoca, este x é único para este y.

Neste caso dizemos que f é uma bijeção e neste caso podemos definir uma função inversa que denotamos por f^{-1}

$$f^{-1} : B \to A$$

e definido assim $f^{-1}(y) = x$ onde $f(x) = y$. Sendo f sobrejetora, dado y arbitrário de B existe x de A tal que $f(x) = y$. Sendo f biunívoca, tal x e único para tal y e portanto podemos colocar $f^{-1}(y) = x$.

Verifique que se f admite função inversa, então valem as igualdades envolvendo as composições de f com f^{-1}:

$$f^{-1}f(x) = x \qquad f\,f^{-1}(y) = y\,.$$

Para quaisquer x de A e y de B. Se $\mathbb{1}_A$ denota a função identidade de A e $\mathbb{1}_B$ a de B, as igualdades acima são equivalentes a:

$$f^{-1}f = \mathbb{1}_A \qquad f\,f^{-1} = \mathbb{1}_B\,.$$

Vamos aplicar agora este conceito, de função inversa, a aplicações lineares.

Se uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é biunívoca e sobrejetora, ela admite (como acima) sua função inversa $L^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, a qual satisfaz

$$L^{-1}L = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} \qquad \text{e} \qquad L\,L^{-1} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}\,.$$

A particularidade aqui é que L tendo inversa e sendo L linear então a inversa L^{-1} será também automaticamente linear como na

Proposição 2.5.1. *Se $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma bijeção linear então sua inversa $L^{-1} : \mathbb{R}^2 \to R^2$ será também linear*

Demonstração: Dados u e v em $\mathbb{R}^2$, tomemos x e y tais que $L(x) = u$ e $L(y) = v$ a que é o mesmo que:

$$L^{-1}(u) = x \qquad \text{e} \qquad L^{-1}(v) = y\ .$$

Como L é linear temos

$$L(x + y) = L(x) + L(y)\,.$$

Aplicando L^{-1} nos dois membros teremos

$$x + y = L^{-1}(L(x) + L(y)) \qquad \text{ou}$$

$$L^{-1}(u) + L^{-1}(v) = L^{-1}(u + v)$$

e temos a propriedade aditiva verificada para L^{-1}.

Agora a homogênea:

$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

Fazendo $L(v) = u$ e aplicando L^{-1} nos dois membros teremos

$$\lambda v = L^{-1}(\lambda L(v)) \qquad \text{ou}$$

$$\lambda v = L^{-1}(\lambda u)$$

mas se $L(v) = u$ então $L^{-1} = v$. Logo

$$\lambda L^{-1}(u) = L^{-1}(\lambda u)$$

como queríamos.

O problema que se coloca agora é: como descobrir que uma certa aplicação linear tem inversa? Como as aplicações lineares tem matriz e vale

$$[LT] = [L]\,[T]$$

isto é, a matriz da composta LT é o produto das matrizes dos fatores $[L]$ e $[T]$. Tiramos daí, em particular (sabendo que $L^{-1}L = \mathbb{1}$) que

$$[L]\,[L^{-1}] = [L\,L^{-1}] = [\mathbb{1}] = \mathbb{1}$$

sendo o último $\mathbb{1}$ a matriz identidade

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}\,.$$

Como verificamos se uma matriz tem inversa

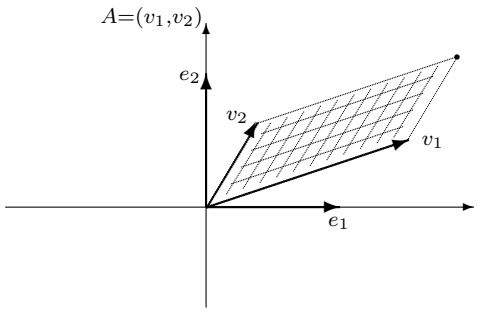
$$[L]\,[L^{-1}] = \mathbb{1} \quad \text{diz que} \quad [L]^{-1} = [L^{-1}]\ .$$

Para sabermos se uma matriz tem inversa basta calcularmos o seu determinante. Admitiremos a seguinte proposição, sem demonstração:

Proposição 2.5.2. *Para que uma matriz* 2×2, $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ *admita uma inversa* $M\,M^{-1} = \mathbb{1}$ *é necessário e suficiente que seu determinante não se anule, ou seja* $ad - bc \neq 0$.

Apesar de não demonstrarmos esta proposição vamos dar uma idéia de como pensar nisso geometricamente.

Uma matriz 2×2 tem duas colunas e cada uma é um vetor do plano $\mathbb{R}^2$, digamos a primeira coluna é v_1 e a segunda é v_2. Podemos assim denotar a matriz A por



v_1 e v_2 determinam um paralelograma, como indicado na figura acima. O determinante da matriz $A = (v_1, v_2)$ e o valor da área de tal paralelograma. Se os vetores v_1, v_2 forem colineares (um é múltiplo real do outro) o referido paralelograma será degenerado e terá área zero e portanto o determinante será nulo. Caso contrário de determinante será não nulo. Assim uma matriz com colunas v_1 e v_2 admitirá inversa se e só se os vetores v_1 e v_2 não forem colineares. No caso de matrizes 2×2, fica fácil escrever a inversa.

Seja $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ com $\det A = ab - cd \neq 0$.

A inversa de A é $B = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Verifique esta afirmação multiplicando $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, nas duas ordens possíveis para obter $\det A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e portanto ao dividir por $\det(A)$ teremos $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja

$$AB = BA = \mathbb{1}$$

portanto $B = A^{-1}$. Fica assim fácil de memorizar como escrever a inversa de uma matriz A, 2×2.

Exercícios: escreva as inversas das seguintes matrizes

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 7 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 3

O espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$

3.1 Operações

Temos desenvolvido, até o momento, os conceitos básicos envolvidos com a geometria analítica, no plano $\mathbb{R}^2$. Podemos imitar estes procedimentos com o espaço $\mathbb{R}^3$ onde

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \,/ x_i \in \mathbb{R} \ \text{ para } \ i = 1, 2 \text{ e } 3\} \ .$$

A passagem de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$ é então conseguida com o aumento de uma coordenada real. Ao invés de pares ordenados de números reais, estamos lidando com ternas de números reais.

Podemos, analogamente ao caso $\mathbb{R}^2$, definir adição de duas ternas

Definição 3.1.1.

$$u = (x_1, x_2, x_3)$$

$$v = (y_1, y_2, y_3) \qquad \textit{por}$$

$$u + v = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1 \, , \, x_2 + y_2 \, , \, x_3 + y_3)$$

isto é, somamos coordenada a coordenada.

Definição 3.1.2. *Multiplicação por escalar: para* $v = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *pomos*

$$\lambda v = \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)\,.$$

Temos assim, como no caso $\mathbb{R}^2$, duas operações em $\mathbb{R}^3$ que o torna o que chamamos de espaço vetorial e seus elementos $v = (x_1, x_2, x_3)$ passam a serem chamados de vetores.

Exercícios: Verifique que as operações, acima definidas, tem as seguintes propriedades:

A1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ associativa.

A2) Existe elemento neutro $0 = (0, 0, 0)$ para o qual vale $v + 0 = v$.

A3) Existe o oposto de cada vetor $v = (x_1, x_2, x_3)\,,\ -v = [-x_1, -x_2, -x_3)$ para o qual $v + (-v) = 0$.

A4) $u + v = v + u$ comutativa.

M1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ associativa.

M2) $1v = v$.

D1) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

D2) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

Para exemplificar como proceder, vamos demonstrar a (A4).

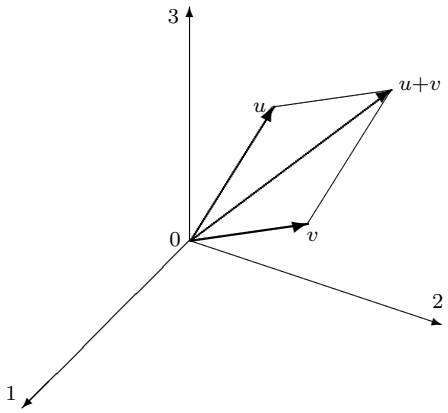
Tomamaos então u e v genéricos.

$$u = (x_1, x_2, x_3) \qquad v = (y_1, y_2, y_3)$$

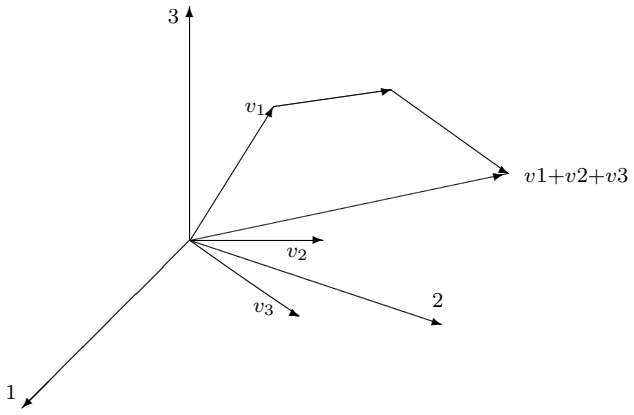
$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1\,,\ x_2 + y_2\,,\ x_3 + y_3) \ = \\ &= (y_1 + x_1\,,\ y_2 + x_2\,,\ y_3 + x_3) = (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3) = v + u \end{aligned}$$

e vale a propriedade comutativa $u + v = v + u$.

A interpretação geométrica da adição de dois vetores u e v é novamente dada pela diagonal do paralelograma gerado pelos lados u e v

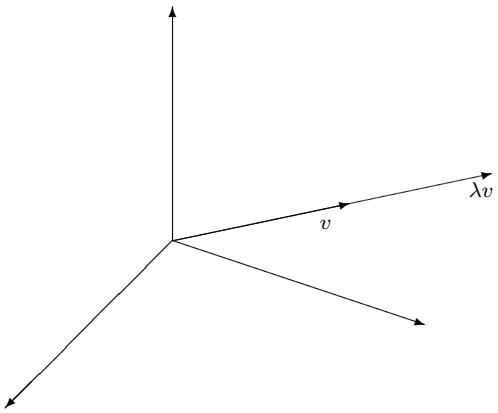


Observar que o segmento de u até $u + v$ orientado de u para $u + v$ pode ser visto como o vetor v aplicado à extremidade de u e com isso obtemos $u + v$. Se tivermos um número finito $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vetores de $\mathbb{R}^3$ e quisermos sua soma $v_1 + v_2 + \cdots + v_k$, basta considerarmos a poligonal que começa com v_1 , fazendo a justaposição da origem de v_i na extremidade de v_{i-1} , ao concluirmos este processo com v_k obtemos a última extremidade que será a soma desejada; observe a figura abaixo



Como a adição é comutativa, a adição destes vetores acima pode ser realizada em qualquer ordem, que o resultado será o mesmo.

A interpretação geométrica da multiplicação de um vetor v por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, é ainda mais simples



O vetor λv é colinear com v e estará na mesma semireta de v se $\lambda \geq 0$ e na oposta se $\lambda \leq 0$ e λ é a razão entre λv e v .

Produto escalar (ou interno) de dois vetores

Definição 3.1.3. *Sejam* $u = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $v = (y_1, y_2, y_3)$.

O produto escalar (ou interno) de u com v é o número real dado por

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Observe a analogia deste com aquele definido em $\mathbb{R}^2$.

Exercícios: Verifique as seguintes propriedades para este produto escalar

E1) $\langle u + u' , v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u', v\rangle$, distributiva.

E2) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, simétrica.

E3) $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$, positiva definida.

E4) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$, homogênea.

Em cada exercício, o leitor deve substituir os vetores por ternas de números reais e trabalhar segundo as definições.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, munido deste produto escalar é denominado espaço euclidiano.

Neste espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ podemos definir norma (ou comprimento) de vetores, assim

Definição 3.1.4. *Para $u \in \mathbb{R}^3$, chamamos de norma ou comprimento do vetor u ao número*

$$\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2} .$$

O expoente $1/2$ indica a operação de raiz quadrada.

Por exemplo a norma do vetor $u = (0, 3, 4)$ é

$$\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2} = \sqrt{0 + 9 + 16} = \sqrt{25} = 5 .$$

Exercícios: Verifique as seguintes propriedades da norma

N1) $\|u\| \geq 0$ e $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

N2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \ \|u\|$

Como no caso do $\mathbb{R}^2$, o produto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ nos permite definir perpendicularismo e ângulo entre dois vetores.

Definição 3.1.5. *Dois vetores u e v de $\mathbb{R}^3$ são ditos perpendiculares, denotado por $u \perp v$ se e só se $\langle u, v\rangle = 0$.*

Verifique que os seguintes pares de vetores são perpendiculares.

1. $u = (1, 1, 2)$ e $v = (7, 3, -5)$.
2. $u = (2, 3, -5)$ e $v = (-8, 7, 1)$.

3. $u = (-8, 7, 1)$ e $v = (1, 1, 1)$.

4. $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, 3, -5)$.

3.2 Ângulo

Definição 3.2.1. *Sejam dois vetores u e v de $\mathbb{R}^3$ de norma 1, $\|u\| = \|v\| = 1$. O ângulo entre u e v é definido como aquele θ que está entre 0 e π e cujo cosseno é*

$$\cos\theta = \langle u, v\rangle .$$

Definição 3.2.2. *Sejam u e v de $\mathbb{R}^3$ não nulos. O ângulo entre u e v é aquele entre 0 e π para o qual temos*

$$\cos\theta = \left\langle \frac{u}{\|u\|} , \frac{v}{\|v\|} \right\rangle .$$

Observe que a definição de ângulo entre dois vetores de $\mathbb{R}^3$ tem a mesma fórmula que no caso $\mathbb{R}^2$. Como são apenas dois vetores u e v, tudo se passa no plano que os contém.

Denotemos o ângulo entre $u \neq 0$ e $v \neq 0$ por $\sphericalangle(u, v)$.

Verifique as seguintes propriedades de $\sphericalangle$.

0) $\sphericalangle(u, v) = \sphericalangle(v, u)$

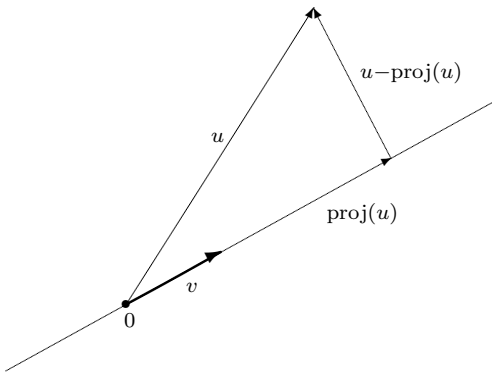
1) $\sphericalangle(-u, v) = \pi - \sphericalangle(v, u)$

2) $\sphericalangle(-u, v) = \sphericalangle(u, -v)$

3) u e v são perpendiculares $\Longleftrightarrow \sphericalangle(u, v) = \dfrac{\pi}{2}$.

3.3 Projeção

Primeiramente vamos considerar o vetor v com norma 1 , $\|v\| = 1$. Afirmamos que o vetor, projeção ortogonal, de u na reta por v é $\text{proj}(u) = \langle u, v\rangle\, v$



Para verificarmos nossa afirmação, basta provar que o vetor diferença $(u - \text{proj}(u))$ é perpendicular a v e que $\text{proj}(u)$ seja um múltiplo de v. Sendo $\text{proj}(u) = \langle u, v\rangle v$ é claro que é múltiplo de v, pois $\langle u, v\rangle$ é um número real. Vejamos a perpendicularidade. Devemos mostrar que $\langle u - \text{proj}(u)\,,\, v\rangle = 0$. De fato

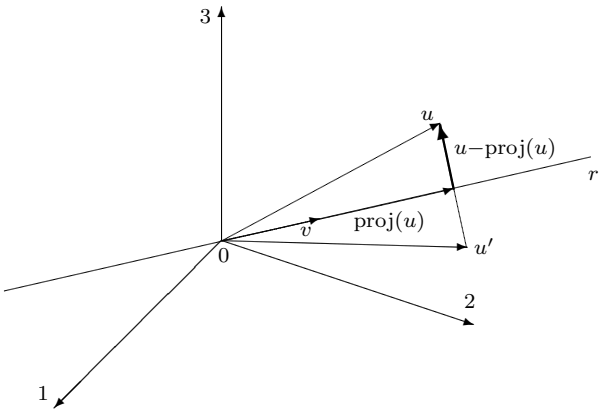
$$\begin{aligned}\langle u - \langle u, v\rangle v\,,\, v\rangle &= \langle u, v\rangle - \langle \langle u, v\rangle v\,,\, v\rangle \;= \\ &= \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle\langle v, v\rangle \;= \\ &= \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle\, 1 = 0\end{aligned}$$

já que $\langle v, v\rangle = \|v\|^2 = 1$.

Como proceder se tivernmos $v \neq 0$, qualquer. A reta por v é a mesma que a reta por $(v \,/\, \|v\|)$, e este tem norma 1. Portanto a projeção ortogonal de u, na reta por v e dada por

$$\text{proj}(u) = \left\langle u\,,\, \frac{v}{\|v\|}\right\rangle \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\, v$$

Vamos aproveitar a oportunidade e apresentarmos a reflexão do espaço $\mathbb{R}^3$, segundo uma reta r que contém um vetor $v \neq 0$



Na figura acima, u é o vetor genérico a ser refletido segundo a reta r que contém o vetor v. Usaremos, de modo oportuno a projeção ortogonal de u em r. Vemos, na figura, que o vetor u refletido de u por r, é dado por

$$u' = u - 2\,(u - \text{proj}(u))\ .$$

Denotando por $\mathbb{R}$ a reflexão temos então

$$\begin{aligned} u' = R(u) &= u - 2\left(u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\, v\right) = u - 2u + 2\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\, v \ = \\ &= 2\,\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\, v - u\,. \end{aligned}$$

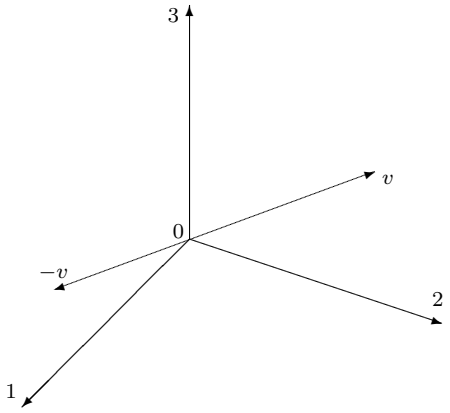
$$R(u) = 2\,\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\, v - u$$
$$R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Se a reta de reflexão r, não passa pela origem, como a que usamos acima, temos que usar o processo LFT (leva, faz e traz) que não explicitaremos aqui.

No espaço temos a aplicação antípoda também que é

$$\begin{aligned} \alpha\ :\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto \alpha(v) = -v \end{aligned}$$

Esta pode ser vista como uma reflexão do espaço pela origem 0 .



Exercícios:

1. Seja a reta r que contém o vetor $v = (1, 2, -3)$.
   Ache os refletidos, pela reta r, dos seguintes vetores: $(2, 4, -6)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(3, 2, -1)$.

2. A aplicação antipodal, que demos acima, é segundo a origem. Como fica a fórmula da antipodal, segundo um ponto qualquer $v_0 \neq 0$ (use o processo LFT; se esqueceu reveja o que se passa no caso de $\mathbb{R}^2$).

Equações de planos no espaço $\mathbb{R}^3$

Dado um vetor $u \neq 0$, $u = (a, b, c)$, o conjunto de todos os vetores $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ perpendicular a u, constituem um plano que passa pela origem. Seus pontos são então as soluções da equação $\langle u, v \rangle = 0$ onde u é fixo (constante) $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$ percorre o plano, ou seja, tal plano tem equação

$$ax + by + cz = 0\,.$$

Quando olhamos para uma equação deste tipo, sabemos, de imediato, que o vetor (a, b, c) é perpendicular a tal plano e o mesmo passa pela origem $(0, 0, 0)$ já

que $a0 + b0 + c0 = 0$ é solução.

De um modo geral pomos

Definição 3.3.1. *Um plano $\mathbb{R}^3$ é aquele conjunto de soluções de uma equação do tipo*

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde a, b, c, d são constantes reais e a, b, c não são todos nulos.

Observe que aqui aparece a nova constante d, que se for não nula, tal plano não passa pela origem, pois caso passasse teríamos a contradição $0 = a0+b0+c0 = d \neq 0$.

Associado ao plano da equação

$$ax + by + cz + d = 0$$

temos a equação que chamamos de homogênea

$$ax + by + cz = 0\,.$$

temos aqui então dois planos que são coincidentes se e só se $d = 0$. Para $d \neq 0$ os dois planos não se encontram, ou seja, são paralelos. Para ver isto, basta concluirmos que as duas equações não admitem solução em comum, pois se (x, y, z) é solução para $ax + by + cz = 0$, a mesma não pode ser solução da outra, pois teriamos a contradição

$$0 = ax + by + cz + d = 0 + d = d \neq 0\,.$$

Assim, sendo os planos P dado por $ax+by+cz+d = 0$ e Q dado por $ax+by+cz = 0$ são paralelos (podendo ser coincidentes se $d = 0$). Assim sendo, como o vetor (a, b, c) e perpendicular a Q o será também perpendicular a P. As equações na forma $ax + by + cz = 0$ são chamadas de cartesianas.

Exercícios:

1. Achar a equação cartesiana do plano P perpendicular ao vetor $(1, -3, 2)$ e que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$.

2. Achar o conjunto intersecção dos planos dados por

$$x + y + z = 0 \qquad \text{e}$$

$$2x - y + z = 0$$

Observe que esta intersecção é uma reta pela origem.

3.4 O produto vetorial

No espaço $\mathbb{R}^3$ podemos definir uma multiplicação de dois vetores quaisquer que se mostra muito útil; trata-se o chamado produto vetorial. Este produto se baseia na noção de determinante, do seguinte modo:

Definição 3.4.1. *Dados dois vetores quaisquer do* $\mathbb{R}^3$, $u = (a, b, c)$ *e* $v = (x, y, z)$, *consideremos os vetores* $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. *O produto vetorial de* u *com* v , *nesta ordem é obtido desenvolvendo-se, formalmente, o determinante da "matriz"*

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

Explicitando:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} &= bz\, e_1 + cx\, e_2 + ay\, e_3 - bx\, e_3 - cy\, e_1 - az\, e_2 \;= \\ &= (bz - cy)e_1 + (cx - az)e_2 + (ay - bx)e_3 \,. \end{aligned}$$

Denotamos o produto vetorial de u com v assim $u \times v$. Então para $u = (a, b, c)$ e $v = (x, y, z)$ temos $u \times v$ com coordenadas $u \times v = (bz - cy\,,\, cx - az\,,\, ay - bx)$

Exercícios:

Calcule os produtos vetoriais dos seguintes pares de vetores $u \times v$.

1. $u = (1, 1, 2) \qquad v = (0, 3, -5)$

2. $u = (3, -1, 7) \qquad v = (3, 3, -7)$

3. $u = (1, 0, 5) \qquad v = (3, -3, -1)$

No início, logo acima, dissemos que iríamos introduzir uma multiplicação em $\mathbb{R}^3$, que apresentamos como o produto vetorial $u \times v$ e, de fato, este tem algumas propriedades análogas à multiplicação de números, como logo abaixo

1. $u \times v$ é distributiva em relação à adicão em cada variável

$$u \times (v_1 + v_2) = u \times v_1 + u \times v_2$$
$$(u_1 + u_2) \times v = u_1 \times v + u_2 \times v$$

2. $u \times v$ é homogênea em cada variável

$$u \times \lambda v = \lambda(u \times v) \quad \text{e} \quad (\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$$

outras propriedades de $u \times v$.

3. $u \times u = 0$ e portanto $u \times (\lambda u) = 0$

4. $u \times v$ não é comutativa, porém $u \times v = -v \times u$ (verifique)

5. $u \times v$ não é associativa, isto é, não vale sempre que $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$. Verifique isto usando os vetores $u = (1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 0)$ e $w = (0, 0, 1)$ e chegará a :

$$(u \times v) \times w = (0, 1, 0) \qquad \text{e}$$

$$u \times (v \times w) = 0$$

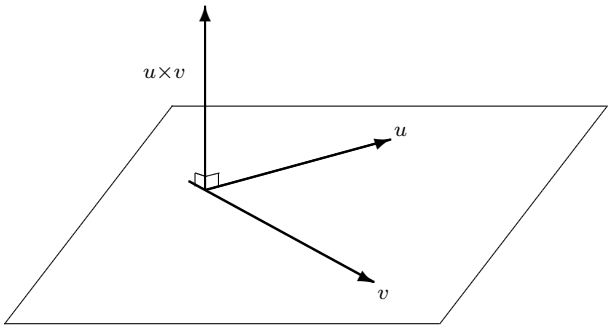
6. O vetor $u \times v$ é sempre perpendicular a u e a v. Olhando a posição em que ficam os vetores e_1, e_2, e_3 após o desenvolvimento do determinante formal, da matriz que define $u \times v$, vemos que para se obter $\langle u \times v\,,\, v \rangle$ basta substituir os símbolos e_1, e_2, e_3 pelas coordenadas de $v = (x, y, z)$ e teremos a expressão de

$\langle u \times v\,,\, v\rangle$ em coordenadas, que é exatamente o determinante de uma matriz com duas linhas iguais e portanto

$$\langle u \times v\,,\, v\rangle = \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

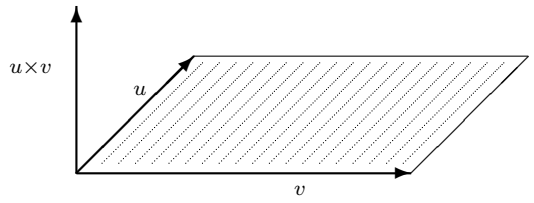
Analogamente para u

$$\langle u \times v\,,\, u\rangle = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$



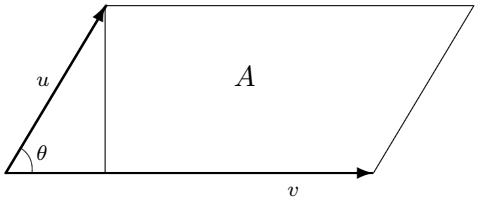
Cálculo da norma do produto vetorial $u \times v$.

Na expressão do determinante, que define $u \times v$, se substituirmos a primeira linha $(e_1\ e_2\ e_3)$ pelas coordenadas de $u \times v$ o resultado do determinante, assim obtido será exatamente o produto escalar $\langle u \times v\,,\, u \times v\rangle$ que sabemos ser, por definição, $\|u \times v\|^2$. Por outro lado, pelas informações que acabamos de dar, acima, $u \times v$ é perpendicular a u e a v.



O determinante que dá $\langle u \times v\,,\, u \times v\rangle$ é o volume do paralelepípedo gerado por u, v e $u \times v$ e portanto seu volume é dado pelo valor da área do paralelograma gerado por u e v, multiplicado pela altura que é $\|u \times v\|$. Se A designa a área do paralelograma gerado por u e v temos então que

$$\|u \times v\|^2 = \langle u \times v\,,\, u \times v\rangle = \|u \times v\|A$$



Sabemos que a referida área $A = \|v\|\,\|u\|\,\text{sen}\,\theta$ e finalmente temos que para $u \times v \neq 0$

$$\|u \times v\| = A = \|u\|\,\|v\|\,\text{sen}\,\theta$$

3.5 Aplicações lineares

Definição 3.5.1. *Uma função $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, é dita uma aplicação linear, se ela tem as seguintes duas propriedades:*

1. $L(u + v) = L(u) + L(v)$, *aditiva*
2. $L(\lambda u) = \lambda L(u)$, *homogênea*

Observe que estas duas propriedades são as mesmas que aparecem na definição que demos, de aplicação linear, no caso do plano $\mathbb{R}^2$.

Agora as coisas seguem "em paralelo"ou analogamente.

Primeiramente temos que se L é aplicação linear então $L(0) = 0$, a origem fica fixa, por L. Isto decorre de (2) pois

$$L(0) = L(0 \cdot 0) = 0 \cdot L(0) = 0 .$$

Usamos aí o fato de que $0 \cdot L(0) = 0$ ou de que $0 \cdot v = 0$, para um vetor v qualquer. Este decorre de:

$0 \cdot v = (0 + 0)v = 0v + 0v$ e somando-se $-(0v)$ a ambos os membros teremos $0 = 0v$.

Se uma determinada função não deixa a origem fixa então a mesma não é linear.

Exercícios: Verifique que as funções abaixo são lineares, isto é, verificam as propriedades (1) e (2) da definição

a) $L(x, y, z) = (x\,,\, x + y\,,\, z)$

b) $L(x, y, z) = (2x + z\,,\, y + z\,,\, 3z)$

b) $L(x, y, z) = (x\,,\, 0\,,\, 0)$

Definição 3.5.2. *Fixando um vetor v_0 de $\mathbb{R}^3$, chamamos de translação de vetor v_0 à função*

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \textit{dada por} \quad T(v) = v + v_0 .$$

Mostre que uma translação de vetor $v_0 \neq 0$ não é uma aplicação linear.

Vimos no caso plano $\mathbb{R}^2$ as noções de distâncias e de transformações que preservam distância, as chamadas isometrias.

Aqui temos analogamente

Definição 3.5.3. *Dados u e v de $\mathbb{R}^3$ temos a distância entre u e v dada por*

$$d(u,v) = \|u - v\| .$$

Exercícios:

Verifique que a função distância d tem as seguintes propriedades

1. $d(u,v) \geq 0$ e $d(u,v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$
2. $d(u,v) = d(v,u)$ simétrica
3. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$, triangular.

Definição 3.5.4. *Uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dita uma isometria se f preserva distâncias entre dois pontos quaisquer de $\mathbb{R}^3$, isto é,*

$$d(f(u)\,,\, f(v)) = d(u,v) .$$

Verifique que uma translação T de vetor v_0 é uma isometria.

Proposição 3.5.5. *Consideremos os vetores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. Uma aplicação linear L, fica univocamente determinada pelos seus valores $L(e_1)$, $L(e_2)$ e $L(e_3)$.*

Demonstração: Seja $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$, qualquer. Podemos expressar v, assim

$$v = (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = xe_1 + ye_2 + xe_3 .$$

Logo

$$L(x) = L(x,y,z) = L(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xL(e_1) + yL(e_2) + zL(e_3) .$$

Portanto conhecendo-se $L(e_1)$, $L(e_2)$ e $L(e_3)$, dado (x,y,z) escrevemos explicitamente $L(x,y,z)$ como queríamos.

Definição 3.5.6. *Chamamos a família de vetores (e_1, e_2, e_3), nesta ordem de base canônica de $\mathbb{R}^3$.*

Definição 3.5.7. *Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicação linear, a matriz de L, denotada por $[L]$ é a matriz que tem para 1ª, 2ª, 3ª colunas, os vetores $L(e_1)$, $L(e_2)$ e $L(e_3)$ respectivamente.*

Exemplos:

1. $L(x, y, z) = (2x\,,\, -3y\,,\, 4z)$

$$[L] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. $L(x, y, z) = (2x - 3y\,,\, x + 2z\,,\, 5y - 3x)$

$$[L] = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercícios:

1. Calcule as matrizes das seguintes aplicações lineares

   a) $L(x, y, z) = (3x - 2z\,,\, x + y\,,\, 4y - 3z)$

   b) $L(x, y, z) = (x + y + z\,,\, 2x - 3y + 2\,,\, 2x + 4y + 2)$

   a) $L(x, y, z) = (x - 7z\,,\, x + y - 7z\,,\, 2x - 3y - 2z)$

2. Explicite na forma como em (1) a única aplicação linear, cujos valores em e_1, e_2, e_3 são

$$L(e_1) = (1, 1, 1)\,, \quad L(e_2) = (3, 4, 5) \text{ e } L(e_3) = (1, 0, -1)$$

3. Considere a aplicação linear obtida em (2) e calcule $L(u \times v)$, onde $u = (2, 1, 3)$ e $v = (-1, -2, 3)$.

Vimos que cada aplicação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem uma matriz $[L]$ 3 por 3. As colunas de $[L]$ são respectivamente $L(e_1)$, $L(e_2)$ e $L(e_3)$ e sabemos que

$$L(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1L(e_2) + x_3L(e_3)$$

Se

$$\begin{aligned} L(e_1) &= (a_{11}\,,\, a_{21}\,,\, a_{31})\,, \\ L(e_2) &= (a_{12}\,,\, a_{22}\,,\, a_{32}) \quad \text{e} \\ L(e_3) &= (a_{13}\,,\, a_{23}\,,\, a_{33}) \quad \text{então} \end{aligned}$$

$L(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) =$
$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\,,\, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\,,\, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\,.$

Assim sendo pomos como definição

Definição 3.5.8. *Se A é uma matriz 3 por 3 e $v = (x_1, x_2, x_3)$ é um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$, aplicamos a matriz $A = (a_{ij})$ no vetor v da seguinte forma:*

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

Como esa definição é exatamente a dada pela expressão acima de $L(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)$ temos que o resultado de se aplicar L a um vetor v é o mesmo que o de se aplicar a matriz de l, $[L]$ ao vetor v, isto é,

$$L(v) = [L]v\,.$$

Definição 3.5.9. *Dadas duas matrizes 3 por 3, A e B, B com colunas (v_1, v_2, v_3), definimos a multiplicação de A por B denotada AB, por*

$$AB = (Av_1\,,\, Av_2\,,\, Av_3)$$

A multiplicação de matrizes tem as seguintes propriedades que admitiremos sem demonstração:

M1) $A(BC) = (AB)C$ associativa

M2) Se $\mathbb{1}$ é a matriz identidade (de colunas e_1, e_2, e_3; então $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$. Existência de elemento neutro $\mathbb{1}$.

M3) Se uma matriz A tem $\det(A) \neq 0$ então existe uma única matriz denotada por A^{-1}, tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}$. Existência de inverso.

D1) $(A + B)C = AC + BC$

D2) $A(B + C) = AB + AC$ distributivas.

Lembramos que a adição de matrizes, que aparece em D_1 e D_2 é definida assim:

$$\text{Se } A = (a_{ij}) \text{ e } B = (b_{ij}) \text{ para } i \text{ e } j \text{ de } 1 \text{ a } 3$$

$$A + B = (a_{ij} + bij)\,.$$

Somamos duas matrizes, somando suas coordenadas das correspondentes aos mesmos índices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

A adição, por sua vez, tem as propriedades seguintes, de verificação direta e simples:

A1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ associativa

A2) Se 0 é a matriz com todas as coordenadas nulas então $A + 0 = A$. Existência do elemento neutro.

A3) Para cada matriz A existe uma única $-A$, cujas coordenadas são as negativas das de A então $A + (-A) = 0$. Existência de oposto.

A4) $A + B = B + A$ comutativa.

O conjunto de todas as matrizes reais, 3 por 3, que denotamos por M_3, com as operações acima de adição e multplicação, passa a ter uma estrutura algébrica muito parecida com a dos números, ou seja, podemos calcular com as matrizes como se fossem números. Devemos chamar a atenção porém para duas propriedades que não se assemelham uma é que a multiplicação numérica é comutativa $xy = yx$, mas a multiplicação de matrizes não é no geral. Tente arranjar duas matrizes A e B tais que $AB \neq BA$. A outra propriedade é que para números, basta ser não nulo para ter inverso. Para matrizes é o determinante não nulo que assegura a existência de inverso. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

é não nula $A \neq 0$ porém não tem inversa pois $\det A = 0$.

Exercícios:

1. Para A e B matrizes constantes e X matriz incógnita, resolva a equação $AX + B = 0$, sabendo que $\det A \neq 0$.

   Solução: $AX + B = 0 \Longrightarrow AX = -B$ como $\det A \neq 0$ sabemos que existe a inversa A^{-1} de A. Então podemos fazer

   $$AX = -B \Longrightarrow A^{-1}AX = -A^{-1}B \Longrightarrow \mathbb{1}X = -A^{-1}B$$

   ou

   $$X = -A^{-1}B$$

   e temos a solução daquela equação.

2. Para A, B e C matrizes constantes e X matriz incógnita, achar solução X da equação

   $$AX + XB = C$$

que comuta com B sabendo-se que $\det(A+B) \neq 0$.

Definição 3.5.10. *Uma matriz D de M_3 é diagonal se todas suas coordenadas fora da diagonal são nulas, isto é, se $D = (d_{ij})$ então $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$.*

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como matriz diagonal, que tem a diagonal constante, como

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \mathbb{1}$$

é chamada de matriz escalar, por ser um múltiplo escalar da matriz identidade.

Exercícios:

1. Mostre que as matrizes escalares $\lambda \mathbb{1}$ comutam com todas as matrizes de M_3 .
2. Mostre que se uma matriz diagonal D comuta com todas as de M_3 então D é uma matriz escalar, $D = \lambda \mathbb{1}$, para algum λ (explicite as matrizes em coordenadas e faça as multiplicações nas duas ordens).

Definição 3.5.11. *Seja A de M_3 , $A = (v_1, v_2, v_3)$, $v_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$. Chamamos de matriz transposta de A e denotamos por A^t a matriz de M_3 com linhas v_1, v_2 e v_3 nesta ordem. Explicitamente, se $A = (a_{ij})$ então $A^t = (a_{ji})$.*

Exemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Produza mais exemplos.

A operação de transposição de matrizes

$$(\ \ )^t : M_3 \to M_3$$

tem as seguintes propriedades, que não demonstraremos:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. Para um escalar λ, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$

Definição 3.5.12. *$A \in M_3$ é dita uma matriz simétrica se e só se $A^t = A$, isto é, se $A = (a_{ij})$ temos que $a_{ij} = a_{ji}$ para i e $j = 1, 2, 3$.*

Exemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 8 \\ 10 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Produza mais exemplos.

3.6 O determinante

Na definição de produto vetorial, usamos a noção de determinante de matriz com 3 linhas e 3 colunas, que supuzemos então conhecida. Aqui queremos apenas chamar a atenção para duas propriedades cxaracterísticas e informar de sua relação

com a noção de volume de paralelepípedo.

Uma matriz A, 3 por 3, isto é, com três linhas e três colunas pode ser vista com uma terna de três vetores de $\mathbb{R}^3$, formada pelas três colunas, assim

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A = (v_1, v_2, v_3) \quad \text{com} \quad v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \text{ e } \quad v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Podemos ver uma matriz 3 por 3 como uma terna, de vetores colunas. No trato com o determinante vamos interpretar a matriz desta forma.

O conjunto das matrizes 3 por 3 que denotamos por M_3 será visto como o conjunto das ternas de vetores de $\mathbb{R}^3$ com a identificação acima.

Se A é de M_3 , $A = (v_1, v_2, v_3)$ e a função determinante que é:

$$\det : M_3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

passa a ser visto como uma função de três variáveis vetoriais

$$\det(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R} .$$

Se fixarmos duas destas variáveis, digamos v_2 e v_3 , o determinante passa a ser uma função de uma única variável

$$\begin{aligned} d_1(\ \ , v_2, v_3) : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \det(v, v_2, v_3) . \end{aligned}$$

Fixando as variáveis v_1 e v_3 teremos o mesmo como função de v_2 , assim

$$\begin{aligned} d_2(v_1, \ \ , v_3) : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto d(v_1, v, v_3) . \end{aligned}$$

Igualmente para v_1 , v_2 , teremos

$$\begin{array}{rcl} d_3(v_1, v_2, \ ) : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & d(v_1, v_2, v)\,. \end{array}$$

O determinante

$$d : M_3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tem as seguintes propriedades características:

1. Cada um dos $d_i (i = 1, 2, 3)$ é aditiva e homogênea.

2. O valor $d(v_1, v_2, v_3)$ muda de sinal se trocarmos entre si duas das variáveis.

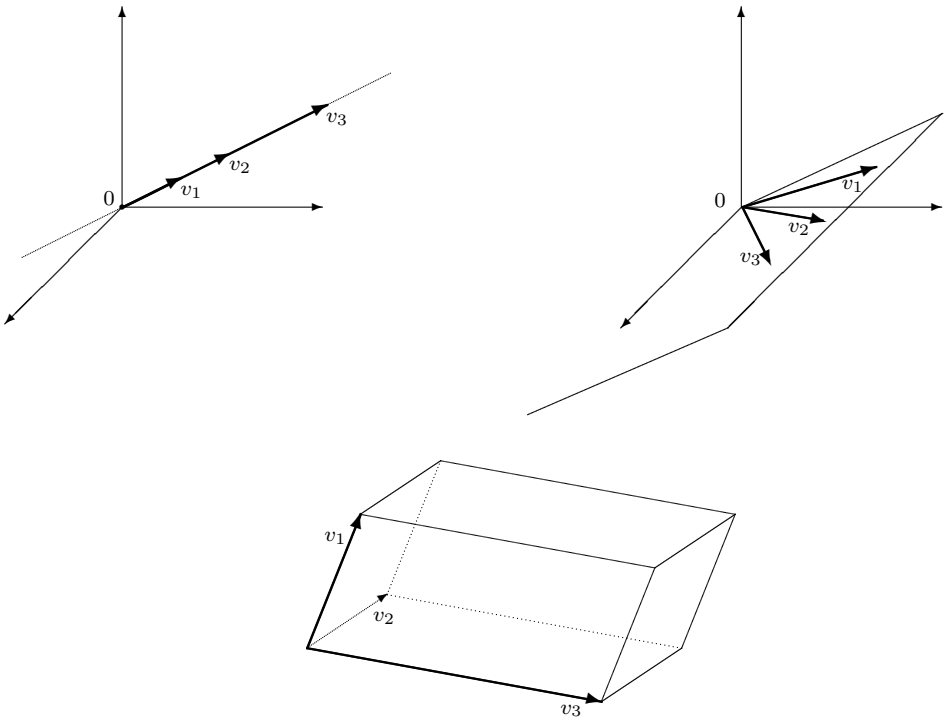
3. $d(e_1, e_2, e_3) = 1$
   onde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e portanto a matriz em questão é a matriz identidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3)\,.$
   Quem aprendeu determinante de outra forma sabe que tem as três propriedades acima e quem não aprendeu pode considerar o determinante como definido por estas três propriedades.
   Decorrem destas três propriedades, por exemplo, que se duas colunas da matriz forem iguais, seu determinante é nulo. Ainda se somarmos a uma coluna, um múltiplo real de qualquer coluna, o determinante não se altera. Valem também as seguintes propriedades:

4. $\det(A^t) = \det(A)$
   onde A^t é a transposta de A .

5. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
   Se B tem colunas v_1, v_2 e v_3 , pela definição do produto $AB = (Av_1\ ,\ Av_2\ ,\ Av_3)$, vemos que a propriedade (5) nos está dizendo exatamente, que

$$\det(Av_1\ ,\ Av_2\ ,\ Av_3) = \det(A)\det(v_1, v_2, v_3)$$

Três vetores v_1, v_2 e v_3 de $\mathbb{R}^3$, podem estar numa mesma reta, pela origem; podem estar num plano, pela origem ou nenhum dos dois. Neste caso, estes três vetores geram, determinam um paralelepípedo de arestas v_1, v_2 e v_3 .



Neste último caso, o paralelepípedo tem volume não nulo, digamos $V(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ e nos dois casos anteriores, dizemos que os paralelepípedos são degenerados e seus volumes nulos.

Agora podemos explicitar qual a relação do determinante com o volume de paralelepípedos; é a seguinte:

a) se $\det(v_1, v_2, v_3) \geq 0$ então $\det(v_1, v_2, v_3) = \text{vol}(v_1, v_2, v_3)$;

b) se $\det(v_1, v_2, v_3) < 0$ então $\det(v_1, v_2, v_3) = -\text{vol}(v_1, v_2, v_3)$.

Portanto sempre, teremos

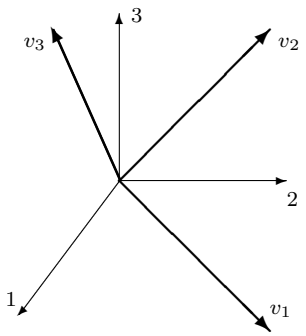
$$| \det(v_1, v_2, v_3) | = \text{vol}(v_1, v_2, v_3)\,.$$

Consideremos três vetores v_1, v_2, v_3 para os quais $\text{vol}(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ ou equivalentemente

$$\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0\,.$$

Isto significa que estes não estão contidos num plano pela origem. Nestas condições podemos introduzir coordenadas para vetores de $\mathbb{R}^3$, usando (v_1, v_2, v_3) como "base"similarmente à base canônica (e_1, e_2, e_3).

Seja então v de $\mathbb{R}^3$ qualquer e tomemos um plano P de $\mathbb{R}^3$ que passe por v e seja paralelo ao plano pelos vetores v_2 e v_3.



Então P encontra a reta que contém v_1 , digamos num ponto p_1 . p_1 é um vetor, múltiplo real de v_1 ou seja $p_1 = \xi_1 v_1$. Procedendo similarmente com v_2 e v_3 em

lugar de v_1 encontraremos $p_2 = \xi_2 v_2$ e $p_3 = \xi_3 v_3$ e assim nosso vetor original fica expresso como

$$v = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3$$

v_1 , v_2 e v_3 com $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ tem então a propriedade de "gerar"o espaço $\mathbb{R}^3$, semelhante a que tem a base canônica e_1, e_2, e_3. Assim chamamos (v_1, v_2, v_3) também de base de $\mathbb{R}^3$, vemos então que $\mathbb{R}^3$ tem muitas (infinitas) bases. Qualquer terna, de vetores (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ com $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Observe que estamos aqui identificando as bases de $\mathbb{R}^3$ com as três colunas de uma matriz A de M_3 para as quais $\det A \neq 0$.

Então, três vetores v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$.

Exercício: *De exemplo de duas bases de* $\mathbb{R}^3$ *diferentes da canônica.*

Seja o conjunto das matrizes reais 3 por 3, M_3 .

Temos em M_3 duas operações definidas: a adição $A + B$ e a multplicação AB de matrizes. Vimos antes as propriedades importantes destas duas operações e as semelhanteças com as duas operações que existem para os números. Agora queremos mostrar que a passagem de uma aplicação linear L para sua matriz, goza de propriedades boas também.

Seja $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ o conjunto das aplicações lineares $L; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Temos em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ definidas também duas operações:

Adição $L + T$ com

$$(L + T)(v) = L(v) + T(v)$$

e composição

$$(LT)(v) = L(T(v)) .$$

Estas duas operações tem as mesmas propriedades, que explicitamos anterior-

mente, para matrizes e para

$$[\ ] : \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow M_3$$

valem:

1. $[L + T] = [L] + [T]$
2. $[LT] \equiv [L] \cdot [T]$

Ambas são de simples verificação, mas a (1) é mais simples e deixaremos para o leitor verificar. Façamos a segunda, tendo em vista a definição de matriz de uma aplicação linear.

Sendo e_1, e_2, e_3 a base canônica de $\mathbb{R}^3$ temos

$$[LT] = ((LT)(e_1),\ (LT)(e_2),\ (LT)(e_3))$$

que é o mesmo que

$$[LT] = (L(T(e_1)),\ L(T(e_2)),\ L(T(e_3)))$$

que é $[L]$ aplicada nas três colunas da matriz $[T]$ e portanto é $[T][T]$ e portanto temos

$$[LT] \equiv [L][T]$$

que é (2). Como queríamos.

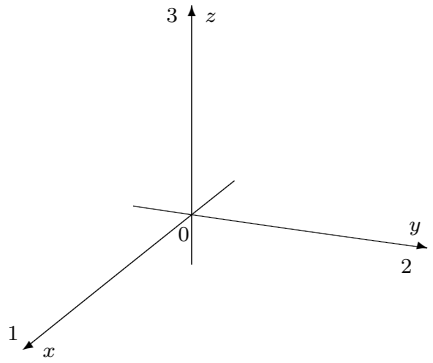
A passagem $[\ ] : \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow M_3$ tem inversa, pois cada matriz A de M_3 define uma aplicação linear L de $\mathbb{R}^3$ pela igualdade

$$L(v) = Av$$

e é claro que, neste caso, $[L] \equiv A$.

3.7 O Cone

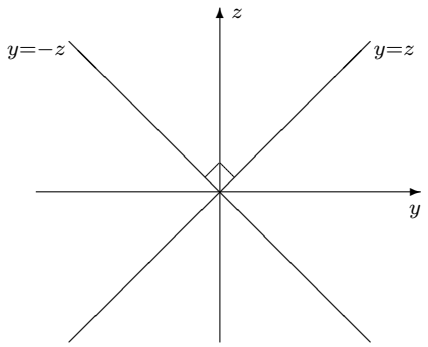
Temos em $\mathbb{R}^3$ o sistema dos três eixos determinados pelos vetores $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ $e_3 = (0, 0, 1)$ da base cnônica do $\mathbb{R}^3$. Quando pensamos nas coordenadas de um vetor de $\mathbb{R}^3$ dadas na forma (x_1, x_2, x_3) estamos, ao mesmo tempo, designando os respectivos eixos por eixo 1, eixo 2 e eixo 3. Quando pensamos nas coordenadas na forma (x, y, z) estamos designando os eixos respectivamente por eixo x, eixo y e eixo z. Usaremos ambas formas sem chamarmos a atenção para isso, portanto guardem estas informações!



O cone reto de duas folhas

Definição 3.7.1. *Chamamos de cone reto de duas folhas ao conjunto de pontos de* $\mathbb{R}^3$ *obtidos pela rotação da reta bissetriz dos eixos* y *e* z*, em torno do eixo* z*.*

A equação de tal reta bissetriz no plano yz é $y = z$. O ângulo que a mesma faz com o eixo z é de 45^0 $(\pi/4)$. Ao rotacionarmos esta reta, em torno do eixo z, geramos o cone de duas folhas, que é reto porque o ângulo que ele forma, na origem (seu vértice) é reto, de 90^0 $(\pi/2)$, que é o ângulo entre as retas $z = y$ e $z = -y$ do plano yz.

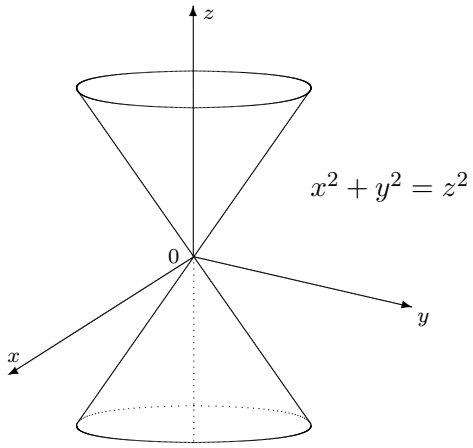


Ele tem duas folhas porque é formado, de fato, por dois "cones"o positivo $z \geq 0$ e o negativo $z \leq 0$.

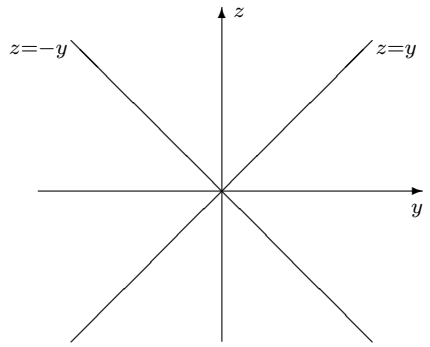
A equação analítica deste cone é

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{ou}$$
$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Como o segundo membro é a distância do ponto (x, y), do plano xy à origem, vemos que a coordenada z é exatamente esta distância ou o seu negativo



Este cone corta o plano yz, cuja equação é $x = 0$ em duas retas, cujos pontos são as soluções de $y^2 = z^2$, ou seja $z = \pm y$



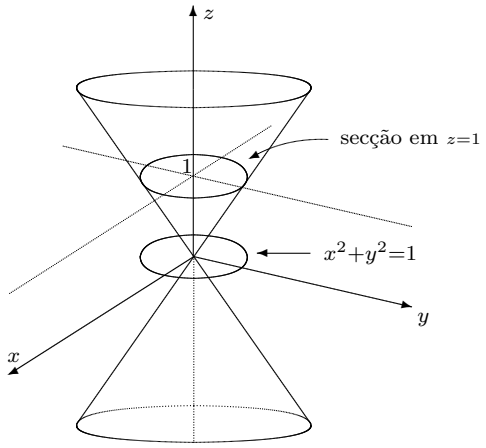
O mesmo corta o plano xz, de equação $y = 0$ em duas retas como acima, onde y fica substituido por x, pois a nova equação da reta é $x^2 = z^2$ ou $z = \pm x$.

Estas, acima, são duas secções especiais do cone por planos, vamos considerar outras.

Tomemos o plano de equação $z = 1$ que, chamamos de plano de altura 1 e vejamos como corta o cone. Fazendo então $z = 1$ na equação do cone obtemos

$$x^2 + y^2 = 1$$

que é a equação do círculo, no plano horizontal xy, de centro 0 e raio 1, ou seja, o plano $z = 1$ corta o cone num círuculo que está na altura 1, de centro em (0,0,1) e raio 1.



Podemos ainda fazer secções do cone por outros planos, mas estas veremos mais adiante.

3.8 Mais matrizes

Já utilizamos matrizes 2 por 2, quando lidamos com o $\mathbb{R}^2$ e 3 por 3 quando lidamos com $\mathbb{R}^3$. Vamos generalizar matrizes para o formato m por n, onde m e n podem ser quaisquer números inteiros maiores que zero.

Definição 3.8.1. *Uma matriz m por n, que escrevemos também como $m \times n$, é uma n-upla de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^m$. Escrevemos explicitamente tal matriz, na forma de um retângulo, em que cada vetor v_j aparece como a j-ésima coluna, obtendo assim um retângulo formado por m vezes n números reais.*

Exemplos:

1. Matriz A, 2×1, tem apenas 1 vetor coluna $v = (a_1, a_2)$:
   Matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ que chamamos de vetor coluna.

2. Matriz A, 1×4, tem quatro colunas de vetores de $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ e portanto 4 números reais:
   Matriz $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)$ que chamamos de matriz linha.

3. Matriz A, 3×2, tem duas colunas que são vetores de $\mathbb{R}^3$:
   Matriz $A : \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$.
   Esta matriz tem duas colunas e três linhas.

4. Matriz A, 3×4, tem quatro colunas de vetores de $\mathbb{R}^3$:
$$A : \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

Quando nos referimos a uma matriz A, $m \times n$ sabemos que se trata de uma matriz com m linhas e n colunas. conseguiremos nos referir melhor a cada coordenada da matriz, ou seja, a cada coordenada dos vetores que a compõe usando notação com dois índices, assim:
$$A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n$$
onde a_{ij} é a i-ésia coordenada do j-]esimo vetor coluna, como no exemplo
$$A : \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \qquad a_{11} = 2 \quad a_{12} = 4 \quad a_{21} = 1 \quad a_{22} = 3 \quad a_{31} = 3 \quad a_{32} = 2$$

Assim de um modo geral explicitamos uma matriz, $m \times n$ em coordenadas, assim:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O primeiro índice indica a linha e o segundo a coluna.

Se $m = n$ dizemos que a matriz é quadrada, como às que já vimos, 2×2 e 3×3.

Designemos o conjunto das matrizes $m \times n$ por M_{mn}. Neste conjunto podemos definir adição e multiplicação por escalar.

Definição 3.8.2. *Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes de M_{mn}. A operação de adição de A com B é dada por*

$$A + B = (c_{ij}) \quad onde \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ ,$$

isto é, somamos coordenada a cooordenada que estão na mesma posição ij.

Fazíamos exatamente o mesmo com as matrizes 2×2 e 3×3.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4-1 & 5-2 & 6-3 \end{pmatrix}$$

Definição 3.8.3. *Sejam $A = (a_{ij})$ de M_{mn} de λ um escalar. A multiplicação de λ por A é dada*

$$(\lambda A) = (b_{ij}) \quad onde \quad b_{ij} = \lambda a_{ij} \ ,$$

isto é, multiplicamos cada coordenada a_{ij} de A, por λ e a colocamos na mesma posição ij.

Exemplo:

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3 & 2.1 & 2.7 \\ 2.4 & 2.2 & 2.8 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{11} & \lambda\, a_{12} & \cdots & \lambda\, a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\, a_{m1} & \lambda\, a_{m2} & \cdots & \lambda\, a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Estas operações tem as mesmas propriedades que vimos antes para os casos 2×2 e 3×3.

A1) $A+(B+C)=(A+B)+C$

A2) Se 0 designa matriz nula (todas as coordenadas nulas) então $A+0=A$

A3) Se $A=(a_{ij})$ e $-A=(-a_{ij})$ então $A+(-A)=0$

A4) $A+B=B+A$

M1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

M2) $1A=A$

D1) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

D2) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

Deixamos as demonstrações destas propriedades a cargo do leitor, que se já trabalhou com os casos anteriores 2×2 e 3×3, o fará igualmente e sem nenhuma dificuldade.

No caso anterior de matrizes 2×2, cujo conjunto designamos por M_2, tínhamos as duas operações acima e mais a de multiplicação de duas matrizes AB. Na operação de multiplicação, obtemos cada coordenada do produto AB, fazendo multiplicação escalar de uma linha de A por uma coluna de B. No caso 2×2 não há problema, pois as linhas de A assim como as colunas de B são vetores de $\mathbb{R}^2$. Aconteceu exatamente o mesmo com o conjunto das matrizes 3×3, M_3 onde pudemos definir multiplicação de duas matrizes AB, já que os vetores envolvidos são de $\mathbb{R}^3$.

No caso das matrizes $m\times n$ com $m\neq n$ não podemos proceder analogamente usando o produto escalar, pois se A e B são ambas matrizes $m\times n$, as linhas de A têm n coordenadas enquanto as colunas de B tem m coordenadas e $n\neq m$ não permitem o produto escalar. Com isso não temos multiplicação entre as matrizes de M_{mn} com $m\neq n$. Podemos, entretanto, multiplicar uma matriz A $m\times n$ com uma

matriz $B \quad n \times r$, isto é, sempre que o número de colunas de A for igual do número de linhas de B, podemos definir a multiplicação de A por B de modo análogo aos casos anteriores.

Definição 3.8.4. *Sejam as matrizes* A, $m \times n$ *e* B, $n \times r$ *a multiplicação de* A, *por* B, *nesta ordem e definida assim:*

Se $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$

$$AB = (c_{k\ell}) \quad \textit{onde}$$

$$c_{k\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\ b_{j\ell}\ ,$$

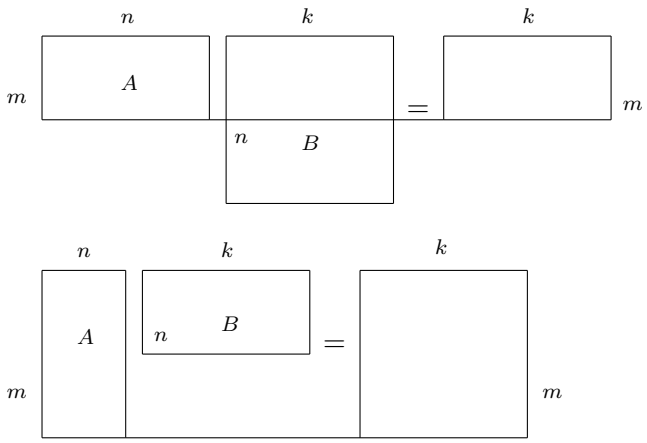
isto é, $c_{k\ell}$ *é o produto escalar da* k*-ésima linha de* A *com a* ℓ*-ésima coluna de* B.

Como abaixo

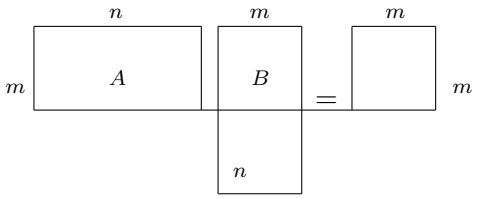
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} + a_{13}\,b_{31} & * \\ a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} + a_{23}\,b_{31} & * \end{pmatrix}$$

O produto de uma matriz A, $m \times n$, por uma natriz B, $n \times r$, será então uma matriz $C = AB$, $m \times r$.

Podemos representar este fato, geometricamente por



O produto de duas matrizes retangulares $m \times n$ e $n \times m$ dará uma matriz quadrada $m \times m$, veja



Neste caso podemos multiplicar B por A nesta ordem, obtendo a matriz quadrada $n \times n$. Faça a representação geométrica de BA e veja a diferença entre AB e BA!

Nos casos anteriormente trabalhados 2×2 e 3×3, definimos o conceito de matriz transposta; aqui temos igualmente.

Definição 3.8.5. *Se A é uma matriz $m \times n$ com vetores coluna $v_1, v_2, \ldots, v_n$, pomos sua transposta A^t como aquela que tem como linhas $v_1, v_2, \ldots, v_n$ na mesma ordem.*

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Portanto se A é $m \times n$, A^t é $n \times m$.

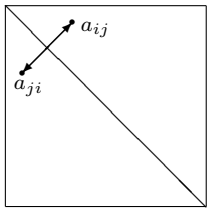
Genericamente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

isto é, a j-ésima coluna de A se transforma na j-ésima linha de A^t. Se A for quadrada $m \times n$ a diagonal de A (a_{ii}) fica a mesma que a da transposta A^t, (a_{ii}).

No caso da matriz A ser quadrada, $m \times m$, uma idéia intuitiva e que parece boa é que, passarmos de A para sua transposta A^t corresponde a refletir a coordenada a_{ij} segundo a diagonal, assim:



e portanto trocarmos entre si as coordenadas a_{ij} e a_{ji}.

A operação de transposição

$$(\ \ )^t : M_{m\times n} \longrightarrow M_{n\times m}$$

tem as seguintes propriedades, de fácil verificação

T1) $(A+B)^t = A^t + B^t$

T2) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

A próxima propriedade é mais trabalhosa, mas basta verificar para um par de matrizes como $A\ \ 2\times n$ e $B\ \ n\times 2$, para se convencer que

T3) $(AB)^t = B^t A^t$

a ordem da multiplicação fica trocada quando passamos para as transpostas.

Exercícios:

1. Multiplique os pares de matrizes abaixo

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 6 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

2. Calcule as transpostas das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & ?? \\ 3 & 4 & ?? \\ 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Calcule as matrizes dada por

a) $A + 5B$

b) $AB^t + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ -5 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$

Calcule

$$\det(AB^t) = ?$$

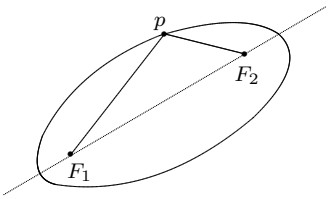
Capítulo 4

Cônicas

Este nome se refere a certos tipos de curvas planas, que são: a elipse, a hipérbole e a parabola. Estes três tipos de curvas recebem o nome de cônicas porque elas aparecem como secções planas de cone. Esta é a razão que nos levou a apresentar a noção de cone anteriormente. No momento vamos introduzir cada uma delas como lugares geométricos de pontos que satisfazem certas condições.

4.1 Elipse

Definição 4.1.1. *Dados dois pontos F_1 e F_2 do plano e uma distância d, maior que a distância de F_1 a F_2 $(d > d(F_1, F_2))$, chamamos de elipse, de focos F_1 e F_2 e distância d ao conjunto de pontos p, do plano, cuja soma das distâncias de p a F_1 e de p a F_2 seja constante e igual a d.*

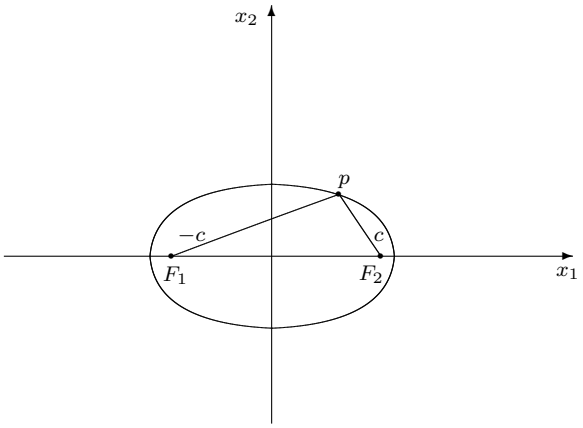


$$d(p, F_1) + d(p, F_2) = d$$

Por conveniência envolvendo as contas, vamos introduzir o valor a, que é a metade de d, $d = 2a$ e ficamos então com

$$d(p_1F_1) + d(p_1F_2) = 2a$$

Para obtermos uma equação de uma elipse, em coordenadas, vamos posicionar os eixos de modo a F_1 ter coordenadas $(-c, 0)$ e F_2 ter coordenadas $(c, 0)$ com $c > 0$



Calculando as distâncias de $p = (x_1, x_2)$ a F_1 e F_2 temos

$$d(p, F_1) = \sqrt{(x_1 + c)^2 + x_2^2}$$

$$d(p, F_2) = \sqrt{(x_1 - c)^2 + x_2^2}$$

Então a equação da elipse será

$$\sqrt{(x_1+c)^2+x_2^2}+\sqrt{(x_1-c)^2+x_2^2}=2a \quad \text{ou}$$

$$\sqrt{(x_1+c)^2+x_2^2}=2a-\sqrt{(x_1-c)^2+x_2^2}$$

Elevando ao quadrado e simplificando chegamos a

$$a\sqrt{(x_1-c)^2+x_2^2}=a^2-cx_1\,.$$

Elevando novamente ao quadrado e simplificando, chegamos a

$$(a^2-c^2)x_1^2+a^2x_2^2=a^2(a^2-c^2)$$

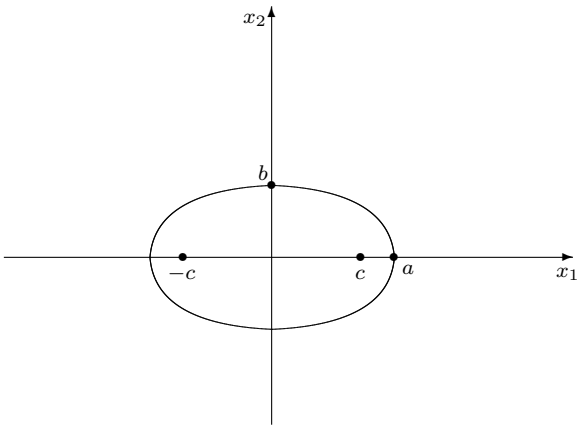
Como $a>c$, temos $a^2-c^2>0$ e por divisão chegamos a

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{a^2-c^2}=1\,.$$

Chamemos $a^2-c^2=b^2$ e temos

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1\,.$$

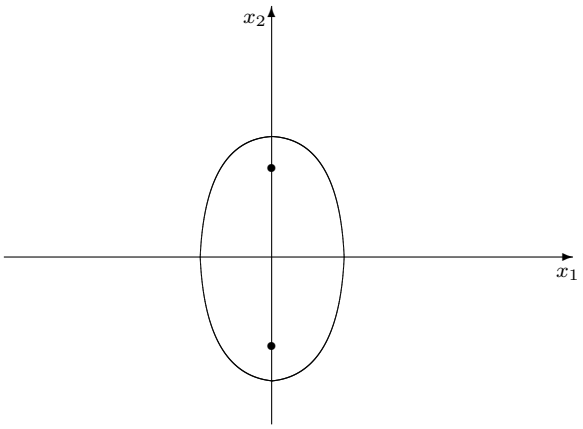
Qualquer elipse então admite uma equação do tipo acima. Chamamos tal equação de equação reduzida ou também de equação na forma canônica. Esta equação representa uma elipse na posição que indicamos na figura a seguir:



onde os focos tem coordenadas $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ com $c > 0$.

Fazendo $x_2 = 0$, na equação obtemos $x_1 = \pm a$ que são os pontos onde a elipse corta o eixo x_1.

Fazendo $x_1 = 0$ obtemos $x_2 = \pm b$ que são os pontos onde a elipse corta o eixo x_2. a e b são chamados os semi-eixos da elipse. Neste caso $a > b$, a é o maior semieixo e b o menor semi-eixo. Se uma certa equação, na forma canônica tiver $b > a$, então os focos estarão no eixo x_2 e ela se apresenta como abaixo



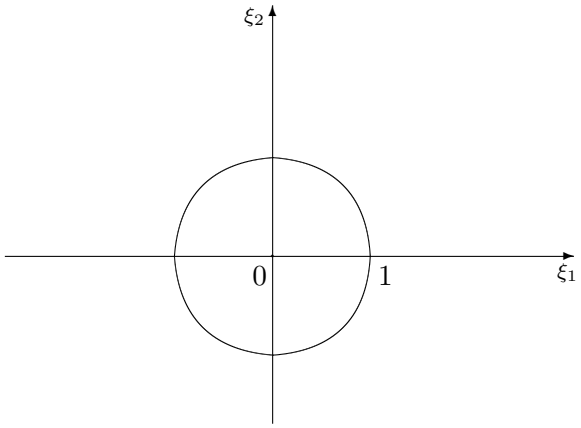
Vejamos que a elipse de equações na forma canônica

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

é a imagem do círculo unitário S^1, por uma aplicação linear. Com a substituição $\xi_1 = \dfrac{x_1}{a}$ e $\xi_2 = \dfrac{x_2}{b}$, passamos daquela equação para

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$$

que é a equação do círculo unitário S^1 de raio 1 e centro na origem



Para passarmos das coordenadas (ξ_1, ξ_2) para (x_1, x_2) usamos a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (\xi_1\, \xi_2) & \longmapsto & T(\xi_1, \xi_2) = (a\xi_1, b\xi_2) = (x_1, x_2) \end{array}$$

Esta T tem matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} .$$

Temos que um ponto (ξ_1, ξ_2) está no círculo unitário S^1, se e só se $T(\xi_1, \xi_2) = (x_1, x_2)$ está na elipse. Chamando a elipse de ξ temos

$$T(S^1) = \xi$$

e a elipse é então imagem do círculo unitário S^1 pela aplicação linear T, como queríamos.

A equação na forma reduzida $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ é equivalente à equação

$$b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2 = a^2 b^2$$

a que chamaremos também de reduzida ou canônica. Inspecionando qualquer das duas vemos que elas são invariantes pelas simetrias

$$(x_1, x_2) \longmapsto (-x_1, x_2)$$

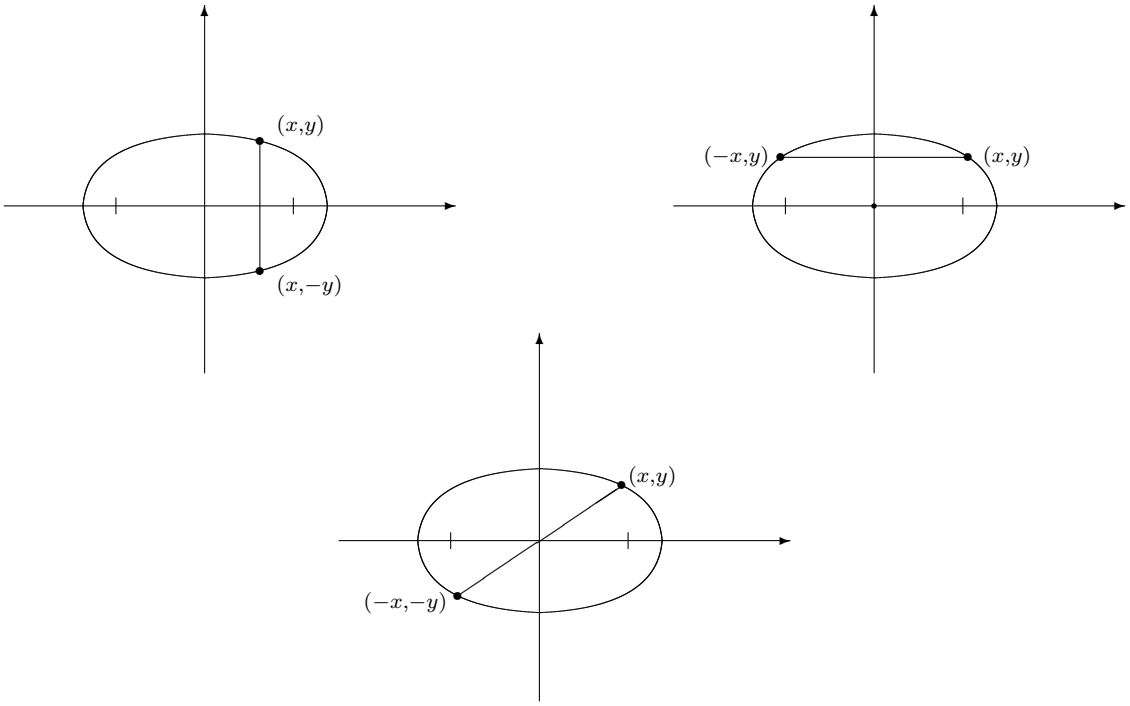
que é a reflexão no eixo x_2

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, -x_2)$$

que é a reflexão no eixo x_1

$$(x_1, x_2) \longmapsto (-x_1, -x_2)$$

que é a antipodal ou reflexão em relação à origem. Por causa desta última simetria, dizemos que a elipse (qualquer) tem centro, que neste caso é a origem. Chamamos de um diâmetro o segmento que liga dois pontos antipodais.



Dada uma elipse numa posição qualquer do plano $\mathbb{R}^2$, que é o mesmo que dar d e os focos F_1 e F_2 em posições quaisquer. Usando uma translação τ e uma rotação

??ρ, podemos trazê-la na posição que dá sua equação na forma reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 - 0$$

Portanto, a equação de uma elipse qualquer pode ser obtida desta reduzida, por transformações de coordenadas envolvendo rotação ρ e translação τ.

Vejamos o que acontece com a equação reduzida quando aplicamos antes uma rotação genérica ρ com centro na origem e ângulo θ. Sabemos que uma tal isometria é linear com matriz

$$[\,\rho\,] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Apliquemo-la nas novas coordenadas (ξ, ζ) para obter (x, y)

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi\cos\theta - \zeta\operatorname{sen}\theta \\ \xi\operatorname{sen}\theta + \zeta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

substituindo na equação reduzida, temos

$$b^2(\xi\cos\theta - \zeta\operatorname{sen}\theta)^2 + a^2(\xi\operatorname{sen}\theta + \zeta\cos\theta)^2 - a^2b^2 = 0\,.$$

Desenvolvendo, chegaremos a

$$\left(a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta\right)\xi^2 + \left(b^2\operatorname{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta\right)\zeta^2 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(a^2 - b^2\right)\xi\zeta - a^2b^2 = 0\,,$$

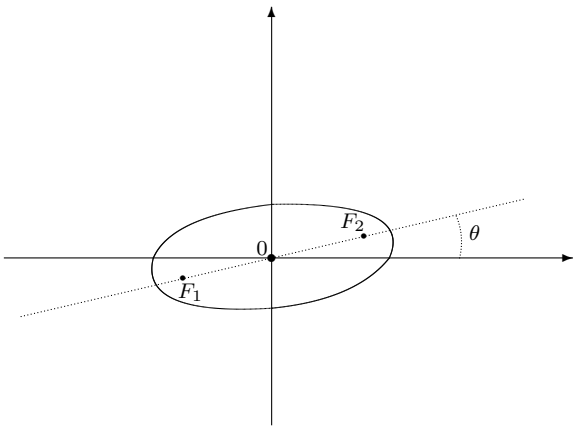
ou seja, chegamos à equação do tipo

$$\alpha\xi^2 + \beta\zeta^2 + \gamma\xi\zeta + \delta = 0$$

onde α e β são positivos, δ é negativo e γ, que é o coeficiente do termo misto $\xi\zeta$, não se anula, $\gamma \neq 0$, a não ser nos casos em que $a = b$ (círculo) ou $\operatorname{sen}\theta = 0$ ou $\cos\theta = 0$, que são os casos em que $\theta = k\pi$ ou $\theta = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$; respectivamente.

Mas estas rotações levam a elipse nela mesma ($\theta = k\pi$) ou naquela em que os focos vão para o eixo y $\left(\theta = k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ e nestes casos a equação reduzida ou não muda ou troca x por y e vice-versa. Portanto uma rotação que realmente altere sua equação introduz o termo misto $\xi\zeta$.

A figura abaixo mostra uma elipse rotacionada da forma reduzida



Como aplicamos uma rotação com centro na origem 0 , esta nova elipse também tem centro na origem 0 .

Dada uma elipse numa posição qualquer do plano, com focos F_1 e F_2 , o ponto médio v_0 , do segmento F_1F_2 é o centro da elipse. Se aplicarmos a esta elipse uma translação de vetor $-v_0$, ela será levada a uma elipse com centro na origem e sua equação passará a ser do tipo $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta = 0$, como já vimos.

Quando passamos da equação reduzida para a nova rotacionada, os coeficientes mudam, mas certas combinações dos mesmos ficam invariantes.

Vejamos:

Reduzida: $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

Rotacionada: $(a^2\text{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta)\xi^2 + (b^2\text{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta)\zeta^2 + 2\ \text{sen}\,\theta\cos\theta(b^2 - a^2)\xi\zeta - a^2b^2 = 0$.

Vamos introduzir a notação $\alpha = a^2\text{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta$, $\beta = b^2\text{sen}^2\theta + a^2\cos^2\theta$,

$\gamma = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta(b^2 - a^2)$ e $\delta = -a^2b^2$.

Com estas notações faça as seguintes contas para concluir estas igualdades

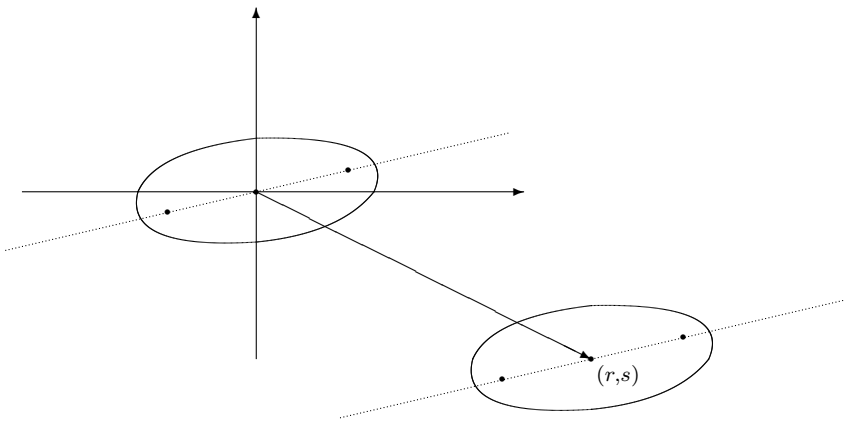
1. $\alpha + \beta = a^2 + b^2$
2. $\alpha\beta - \dfrac{1}{4}\gamma^2 = a^2b^2$
3. $\dfrac{1}{4}\gamma^2\delta - \alpha\beta\delta = a^4b^4$

Portanto uma rotação na equação reduzida da elipse deixa invariante estas combinações com os coeficientes.

Vejamos agora o que acontece se após a rotação, chegando a

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta = 0$$

aplicamos uma translação de vetor (r, s)



Substituindo então x por $x - r$ e y por $y - s$. Fazendo as contas chegamos a:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy - 2(\alpha r + \gamma s)x - 2(\beta s + \gamma r)y + \alpha r^2 + \beta s^2 + \gamma rs + \delta = 0\,.$$

Observe que a translação não altera os coeficientes da parte de grau 2 da equação e faz aparecer uma parte de grau 1, linear, alterando também o termo constante (de

grau 0).

Como os coeficientes α, β e γ não sofreram alteração, continua valendo os invariantes

1. $\alpha + \beta = a^2 + b^2$
2. $\alpha\beta - \dfrac{1}{4}\gamma^2 = a^2b^2$

O terceiro envolve o termo constante e temos que elaborar um pouco para relacioná-lo.

Vamos alterar a notação de (x, y) para (x_1, x_2) e assim introduzirmos uma relação entre os coeficientes e seus monômios. Escreveremos a equação completa do segundo grau assim:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0\,.$$

Então para a equação anteriormente apresentada temos

$$a_{11} = \alpha\,,\ a_{22} = \beta\,,\ a_{12} = \frac{1}{2}\gamma\,,\ a_{13} = -(\alpha r + \gamma s)$$

$$a_{23} = -(\beta s + \gamma r)\,,\ a_{33} = \alpha r^2 + \beta s^2 + \gamma rs + \delta$$

Então aplicando uma rotação e uma translação à equação reduzida da elipse chegamos a uma equação em duas variáveis x_1 e x_2 completa.

Com esta nova notação, associaremos a esta equação a matriz 3×3 simétrica

$$M_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Os invariantes que explicitamos antes podem agora serem postos na forma

1. traço de $M_2 = a_{11} + a_{22}$
2. determinante de M_2 $\ a_{11}a_{22} - a_{12}^2$

3. determinante de M_3 $\det M_3$

Estes nós já havíamos apresentados para a equação da elipse com centro na origem

$$a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + 2a_{12}\, x_1\, x_2 + \delta = 0$$

e os (1) e (2) também para o caso geral da equação completa. O invariante (3) é a novidade aqui e deixamos ao leitor fazer as contas para o caso (3), isto é, escreva a matriz N_3 para a equação na forma reduzida e calculando mostre que $\det N_3 = \det M_3$.

4.2 A hiperbóle

Definição 4.2.1. *Dados dois pontos F_1 e F_2 do plano, distantes entre si de um valor $2c$. Seja $0 < a < c$. Chamamos de hipérbole ao conjunto (lugar geométrico) dos pontos p do plano em questão tais que a diferença entre as distâncias de p a F_1 e de p a F_2 seja constante e igual a $2a$, isto é:*

$$|d(p\,,\,F_1) - d(p\,,\,F_2)| = 2a\,.$$

Vejamos como é a equação da hipérbole na forma reduzida ou canônica. Fixamos para tal um sistema de eixos perpendiculares com os focos no eixo x e $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$. Com este referencial, um ponto $p = (x, y)$ da hipérbole deve satisfazer então:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a\,.$$

Operando de modo a suprimir as raízes quadradas semelhantemente ao caso da elipse chegaremos à equação, na forma reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

pondo $c^2 - a^2 = b^2$ e portanto $0 < b < c$, com a escolha positiva, chegamos à forma

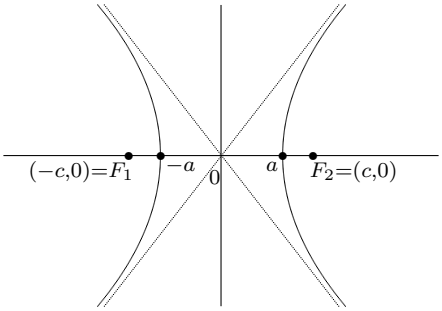
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou, eliminando denominadores

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 1\,.$$

Observe que a diferença entre esta equação e a da elipse está no sinal do coeficiente de y^2.

Igualmente ao caso da elípse temos as simetrias da hipérbole em relação aos eixos x e y e em relação à origem, pela aplicação antipodal. Assim como a elipse tem centro, a hipérbole também tem centro, neste caso sendo a origem, que é também o ponto médio do segmento focal F_1F_2.



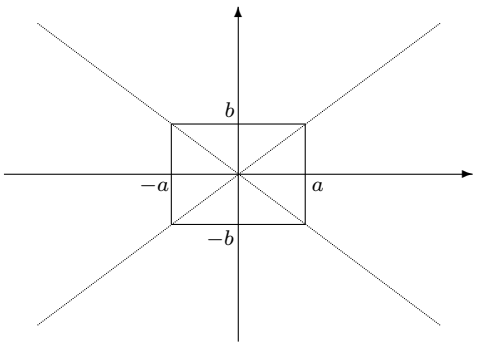
A figura acima é uma representação gráfica da hipérbole de focos F_1 e F_2. Enquanto a elipse é uma curva fechada, a hipérbole não se fecha e ela tem duas componentes. As retas que aparecem na figura são chamadas assíntotas da hipérbole.

Esta retas tem equações:

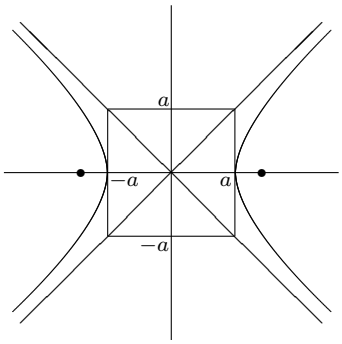
$$y = \frac{b}{a}\,x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}\,x$$

As assíntotas da hipérbole tem a propriedade que o ponto da hipérbole vai para o infinito se aproximando mais e mais da assíntora.

As assíntotas passam pelas diagonais do retângulo de vértices $(\pm a\,,\,\pm b)$.



Uma vez que a e b são dados pelo retângulo, este determina a hipérbole.
No caso de $a = b$, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, o retângulo em questão se torna um quadrado



Neste caso chamamos a curva de uma hipérbole quadrada. Neste caso, como $c^2 - a^2 = b^2$ temos $c^2 - a^2 = a^2$ e $c = a\sqrt{2}$, que dá as coordenadas dos focos: $F_1 = (-a\sqrt{2}\,,\,0)$, $F_2 = (a\sqrt{2}\,,\,0)$.

Vamos proceder analogamente ao que fizemos com a elipse. Vamos alterar a equação reduzida da hipérbole, por uma rotação de ângulo θ e centro na origem. Lá nós tivemos o cuidado de introduzir novas variáveis como ξ e ζ. Aqui vamos abusar, um pouco da notação, sem prejuizo do resultado final. Mostraremos as variáveis

originais (x, y) ou com a mudança para $(x_1\,,\, x_2)$. Assim, consideremos a equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ou}$$

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

e a rotação dada pela matriz $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

substituindo na equação reduzida, temos

$$b^2(x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)^2 - a^2(-x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)^2 - a^2b^2 = 0\,.$$

Desenvolvendo chegaremos a:

$$(b^2\cos^2\theta - a^2\operatorname{sen}^2\theta)x^2 - (b^2\operatorname{sen}^2\theta - a^2\cos^2\theta)y^2 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(a^2+b^2)xy - a^2b^2 = 0\,,$$

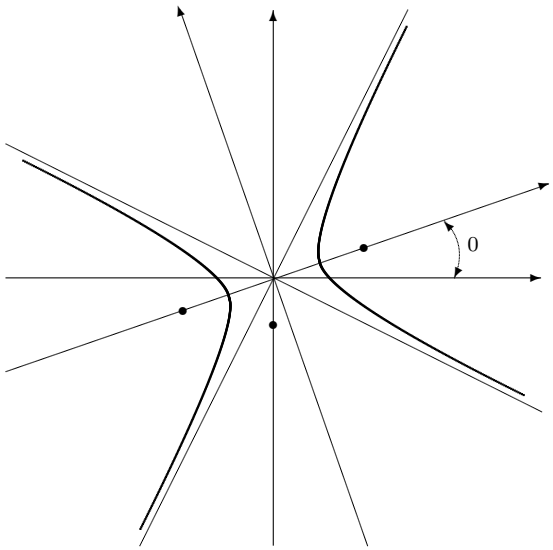
ou seja, chegamos a uma equação do tipo

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy - a^2b^2 = 0\,.$$

Esta é portanto equação de uma hipérbole que é uma rotacionada daquela canônica, de ângulo θ. Se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ teremos uma hipérbole com os focos no eixo y e de fato a equação rotacionada fica

$$-a^2x^2 + b^2y^2 + 0xy - a^2b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad b^2y^2 - a^2x^2 - a^2b^2 = 0\,.$$

Que seria a canônica porém com os eixos x e y permutados entre si. O mesmo acontece para $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ quando teremos a mesma hipérbole, com focos no eixo y, porém com as componentes trocadas.



Começamos com a equação reduzida

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

e chegamos , após a rotação à equação da forma

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy - a^2b^2 = 0\,.$$

Vemos aí que a rotação não altera o termo constante da reduzida e cria o termo misto γxy, a não ser que $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$ que são essencialmente os casos $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta = \pm\pi$.

Usando a notação indexada temos a equação rotacionada escrita assim:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{33} = 0$$

onde

$$\begin{aligned} a_{11} &= b^2\cos^2\theta - a^2\operatorname{sen}^2\theta \\ a_{22} &= b^2\operatorname{sen}^2\theta - a^2\cos^2\theta \\ a_{12} &= \operatorname{sen}\theta\cos\theta(a^2+b^2) \qquad a_{33} - a^2b^2 \end{aligned}$$

E os invariantes que apresentamos antes, no caso da elipse, será que são invariantes aqui também. Considerando a equação reduzida na forma indexada também temos

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0$$

com $a_{11} = b^2$, $a_{22} = -a^2$, $a_{33} = -a^2b^2$ e $a_{12} = 0$.

Fazendo um cálculo direto, verifique que a partir das matrizes da reduzida e da rotacionada

$$\text{reduzida} \quad N_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{rotacionada} \quad M_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

temos que:

$$A_1 = a_{11} + a_{22}$$

$$A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \det(N_3) = \det(M_3)$$

são ainda invariantes por rotação.

No caso da reduzida temos

$A_1 = a_{11} + a_{22} = b^2 - a^2$

$A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -b^2a^2 - o^2 = -a^2b^2$

e $A_3 = \det N_3 = a^4b^4$.

Portanto estes valores deverão se repetir para o caso da rotacionada.

Vejamos agora como a equação da hipérbole rotacionada

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{33} = 0$$

se altera quando fazemos uma translação nesta hipérbole de vetor (r, s).

Substituímos então x_1 por $(x_1 - r)$ e x_2 por $x_2 - s$. Assim

$$a_{11}(x_1 - r)^2 + a_{22}(x_2 - s)^2 + 2a_{12}(x_1 - r)(x_2 - s) + a_{33} = 0$$

Desenvolvendo, chegaremos a

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+2a_{12}x_1x_2-(2a_{11}r+s)x_1-2(2a_{22}s+r)x_2+a_{11}r^2+a_{22}s^2+2a_{12}rs+a_3 = 0\,.$$

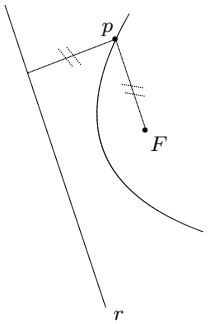
Observemos que a translação não altera a parte de segundo grau e cria uma parte de primeiro grau, isto é, linear. O termo constante ficou bastante alterado.

Calcule os invariantes anteriormente definidos A_1 , A_2 e A_3 para concluir que são de fato invariantes. Para a hipérbole de equação reduzida $b^2x_1^2-a^2x_2^2-a_2b_2 = 0$, sabemos que

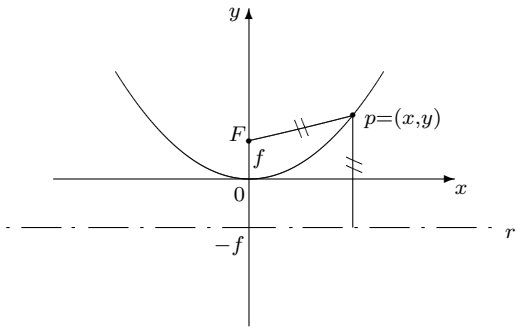
$$A_1 = b^2 - a^2\,, \quad A_2 = -a^2b^2 \quad \text{e} \quad A_3 = a^4b^4\,.$$

4.3 A parábola

Definição 4.3.1. *Dados uma reta r e um ponto F fora da reta r . chamamos de parábola o conjunto de pontos (o lugar geométrico) p cujas distâncias à reta r e ao ponto F são iguais. Chamamos a reta r de diretriz e o ponto F de foco da parábola.*



Calculemos a equação cartesiana, reduzida da parábola. Tomemos os eixos perpendiculares x e y em que o eixo y passa pelo foco F e pelo ponto médio (zero) do segmento que liga F à diretriz r perpendicularmente. Assim teremos a configuração abaixo.



Pela definição, a equação cartesiana da parábola com foco $F = (0, f)$ e diretriz dada pela equação $y = -f$, é:

$$|y + f| = \sqrt{x^2 + (y - f)^2}$$

ou, elevando ao quadrado

$$y^2 + f^2 + 2fy = x^2 + y^2 + f^2 - 2fy$$

ou

$$x^2 = 4fy = 0$$

tirando o valor de y , podemos expressá-la também na forma de y em função de x e neste caso a parabola é o 'gráfico da função

$$y = f(x) = \frac{1}{4f}\, x^2$$

$$y = \frac{1}{4f}\, x^2$$

tanto esta como a $x^2 - 4fg = 0$ serão chamadas de equações reduzidas da parábola.

Repetiremos aqui o mesmo procedimento que fizemos com a elipse e a hipérbole, ou seja, vamos inicialmente rotacionar a parábola em torno da origem, de um ângulo θ. Mudemos a notação para

$$x_1^2 - 4fx_2 = 0$$

e aplicamos as substituições

$$x_1 \to x_1 \cos\theta + x_2 \operatorname{sen}\theta$$

$$x_2 \to -x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta\,.$$

Então temos

$$(x_1 \cos\theta + x_2 \operatorname{sen}\theta)^2 - 4f(-x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta) = 0\,.$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$x_1^2 \cos^2\theta + x_2^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2(\cos\theta\ \operatorname{sen}\theta)x_1\,x_2 + 2(2f\operatorname{sen}\theta)x_1 - 2(2f\cos\theta)x_2 = 0\,.$$

Chegamos assim a uma equação da forma

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 = 0$$

onde

$$a_{11} = \cos^2\theta\,,\ a_{22} = \operatorname{sen}^2\theta\,,\ a_{12} = \cos\theta\ \operatorname{sen}\theta\,,\ a_{13} = 2f\operatorname{sen}\theta \ \text{ e } \ a_{23} = -2f\cos\theta\,.$$

Em ambas, a equação reduzida e na rotacionada, o termo constante, que costumamos denotar por a_{33}, é nulo, $a_{33} = 0$.

Usando a equação reduzida

$$x_1^2 - 4fx_2 = 0$$

e usando a notação indexada temos

$$1\,x_1^2 + 0\,x_2^2 + 2\cdot 0\,x_1x_2 + 2\cdot 0\,x_1 + 2(-2f)x_2 + 0 = 0$$

chegamos à matriz

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2f \\ 0 & -2f & 0 \end{pmatrix} .$$

Donde os invariantes são $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = -4f^2$.

Verifique, por cálculo direto que os valores A_1 , A_2 e A_3 para a equação rotacionada são os mesmos que os da equação reduzida.

Vamos agora aplicar uma translação de vetor (r, s) na equação rotacionada

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 = 0$$

$$a_{11}(x_1 - r)^2 + a_{22}(x_2 - s)^2 + 2a_{12}(x_1 - r)(x_2 - s) + 2a_{13}(x_1 - r) + 2a_{23}(x_2 - s) = 0 .$$

Desenvolvendo chegamos a:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2(a_{13} - a_{11}r - a_{12}s)x_1 + 2(a_{23} - a_{22}s - a_{12}r)x_2 \\ + \quad & (a_{11}r^2 + a_{22}s^2 + 2a_{12}rs - 2a_{13}r - 2a_{23}s) = 0 . \end{aligned}$$

Portanto a equação geral, final, é do tipo

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2\alpha_{13}x_1 + 2\alpha_{23}x_2 + \alpha_{33} = 0 .$$

Observemos que a parte de grau dois não sofreu alteração, é a mesma que a da equação apenas rotacionada. A parte linear sofreu alteração e surgiu agora termo constante que pode ser não nulo.

Faça novamente as contas dos valores A_1 , A_2 , A_3 para concluir que continuam invariantes após a translação.

Vimos, até o momento, que tanto a elipse como a hipérbole e a parábola, em posições gerais (quaisquer) são curvas que satisfazem uma equação do segundo grau completa.

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0 .$$

Dependendo dos coeficientes teremos uma elipse ou uma hipérbole ou uma parábola. Esta equação nos fornece a matriz simétrica

$$M_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e os invariantes:

$A_1 = a_{11} + a_{22}$

$A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$A_3 = \det(M_3)$

A pergunta que deve ser feita agora é: Será que, qualquer que sejam os coeficientes a_{ij} , teremos sempre o conjunto solução de uma tal equação sendo uma das: elipse, parábola, hipérbole?

Podemos mostrar casos que indicam que a resposta é **não** .

Exemplos:

1. O conjunto solução pode ser vazio.

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$$

2. O conjunto solução pode ter apenas um ponto

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

3. O conjunto solução pode ser uma reta. Usando só a parte linear $a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33} = 0$ ou se quisermos fazer aparecer quadrados $(a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33})^2 = 0$.

4. O conjunto solução pode ser a união de duas retas

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

e

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0$$

podem ser unidas numa equação do segundo grau

$$(ax_1 + bx_2 + c)(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma) = 0\,.$$

Este produto se anula se e só se um dos fatores se anula e teremos as duas equações das retas como acima.

Os casos acima (1), (2), (3) e (4) são os casos que chamamos de degenerados. O que informamos aqui é que fora estes o conjunto solução deverá ser, de fato, uma das curvas: elipse, hipérbole ou parábola.

A forma de distinguirmos qual é analizando os invariantes, que podemos calcular a partir das equações reduzidas. Vejamos

Elipse

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ ou $b^2x_1^2 + a^2x_2^2 - a^2b^2 = 0\,.$

Então teremos a matriz

$$M_3 = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

$A_1 = b^2 \quad A_2 = a^2b^2 \quad A_3 = -a^4b^4$

Hipérbole

$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ ou $b^2x_1^2 - a^2x_2^2 - a^2b^2 = 0\,.$

$$M_3 = \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2b^2 \end{pmatrix}$$

$A_1 = b^2 \quad A_2 = -a^2b^2 \quad A_3 = -a^4b^4$

Parábola

$x_1^2 - 4fx_2 = 0$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2f \\ 0 & -2f & 0 \end{pmatrix}$$

$A_1 = 1 \quad A_2 = 0 \quad A_3 = 4f^2$

Para comparar é melhor juntar os invariantes numa tabela

	A_1	A_2	A_3
Elipse	b^2	a^2b^2	$-a^4b^4$
Hipérbole	b^2	$-a^2b^2$	a^4b^4
Parábola	1	0	$4f^2$

Observemos que a matriz M_3 é feita com os coeficientes da equação do segundo grau completa e portanto os invariantes estão presos à equação e não diretamente à

cônica que a mesma representa. Mais especificamente, as duas equações abaixo são diferentes para $\lambda \neq 1$ e para $\lambda \neq 0$ elas representam a mesma cônica.

(I) $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$

(II) $\lambda a_{11}x_1^2 + \lambda a_{22}x_2^2 + 2\lambda a_{12}x_1x_2 + 2\lambda a_{13}x_1 + 2\lambda a_{23}x_2 + \lambda a_{33} = 0$

Entretanto as matrizes M_3 diferem pela multiplicação por λ. Se M_3 designa a matriz de (I) então a de (II) é λM_3. Os invariantes sofrerão as seguintes alterações (verifque)

$$\begin{aligned} A_1(II) &= \lambda\, A_1(I) \\ A_2(II) &= \lambda^2 A_2(I) \\ A_3(II) &= \lambda^3 A_3(I) \end{aligned}$$

Portanto se $\lambda < 0$ os sinais dos invariantes 1 e 3 serão alterados. Só fica com o mesmo sinal o invariante 2. Devemos entender assim que o A_2 é que esta ligado à cônica e não apenas à equação. Os invariantes 1 e 3 são invariantes da equação e não da cônica que a equação representa. Da tabela acima tiramos que, para os casos não degenerados:

$$\begin{aligned} A_2 > 0 &\longleftrightarrow \text{Elipse} \\ A_2 < 0 &\longleftrightarrow \text{Hipérbole} \\ A_2 = 0 &\longleftrightarrow \text{Parábola} \end{aligned}$$

Para os casos degenerados temos

Vazio: $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} A_2 &= 1 \\ A_1 &= 2 \quad A_3 = 1 \end{aligned}$$

Ponto: $x_1^2 + x_2^2 = 0$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} A_2 = 1 \\ A_1 = 2 \quad A_3 = 0 \end{array}$$

Duas retas paralelas: $x_2^2 - k\,x_2 = 0$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{k}{2} \\ 0 & -\frac{k}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} A_2 = 0 \\ A_1 = 1 \quad A_3 = 0 \end{array}$$

Duas retas concorrentes: $x_2^2 - \ell\,x_1x_2 = 0$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\ell}{2} & 0 \\ -\frac{\ell}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} A_2 = -\dfrac{\ell^2}{4} \\ A_1 = 1 \quad A_3 = 0 \end{array}$$

Assim sendo uma tabela completa é:

$$\begin{array}{rcl} A_2 > 0 & \Longrightarrow & \text{Elipse ou vazio ou ponto} \\ A_2 < 0 & \Longrightarrow & \text{Hipérbole ou duas retas concorrentes} \\ A_2 = 0 & \Longrightarrow & \text{Parábola ou duas retas paralelas} \end{array}$$

Para distinguir os casos degenerados, devemos levar em conta os dois outros invariantes A_1 e A_3 e com isso distinguiremos os casos degenerados com o mesmo A_2 dos não degenerados, por exemplo: se tivermos $A_2 = 0$ não saberemos se temos uma parábola ou duas retas paralelas. Examinando os A_1 e A_3 tem

$$\begin{array}{l} \text{Parábola} \implies A_2 = 0\,,\ A_1 > 0 \ \text{ e } \ A_3 > 0 \\ \text{Duas retas paralelas} \implies A_2 = 0\,,\ A_1 = 1 \ \text{ e } \ A_3 = 0 \end{array}$$

Portanto saberemos dizer qual é qual.

Observe que não atribuimos centro à parábola, pois usamos a simetria antipodal

para a existência de um centro e a parábola não tem tal simetria. Ela possui apenas uma simetria axial, na posição canônica de onde tiramos a equação reduzida da mesma, o eixo y e eixo de simetria de reflexão da parábola.

Exercícios:

Para cada equação abaixo, decida qual tipo de curva ela representa. Se o cálculo dos invariantes não der um dos padrões apresentados na tabela então trata-se de algum caso degenerado.

1. $x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$
2. $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2x_2 - 8 = 0$
3. $4x_1^2 + 8x_2^2 - 6x_1x_2 - 4x_1 + 10x_2 - 20 = 0$

4.4 Secções do cone

A razão de termos apresentado o cone de duas folhas, de equação cartesiana (no espaço $\mathbb{R}^3$)

$$x^2 + y^2 = z^2$$

é para mostrar que as curvas que estamos estudando, provém de secções do cone por planos no espaço.

Se o plano for horizontal $z = k$ constante, ele corta o cone em

$$x^2 + y^2 = k^2$$

que é a equação de um círculo no plano xy.

Se o plano for vertical, como por exemplo $y = k$ constante teremos o corte com equação

$$x^2 + k^2 = z^2$$

ou

$$z^2 - x^2 = k^2$$

que é a equação de uma hipérbole, no plano xz.

Se tomarmos agora um plano paralelo a uma única geratriz do cone, digamos

$$x + z - 2 = 0$$

que é paralelo à geratriz $y + z = 0$ e é perpendicular ao plano yz.

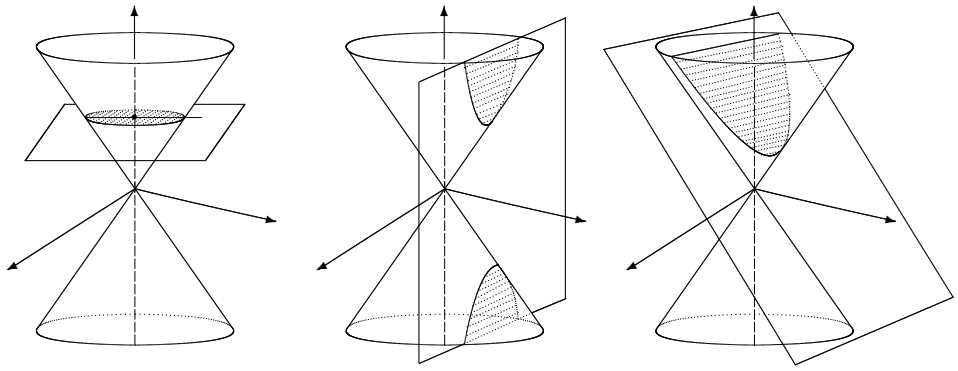
Vejamos como fica a equação com $z = 2 - x$

$$x^2 + y^2 = (2 - x)^2 = 4 + x^2 - 4x$$

ou

$$y^2 + 4x - 4 = 0\,.$$

Esta é a equação de uma parábola.



Nós usamos, nestes exemplos, planos particulares. Mas se um plano P corta todas as geratrizes do cone, a secção será uma curva fechada e será uma elipse ou o caso degenerado se P contém a origem e a secção será então apenas um ponto 0.

Se o plano P for paralelo a duas geratrizes, a secção será uma hipérbole ou apenas duas retas, que é o caso degenerado, se passar pela origem 0.

A secção dando parábola acontece quando o plano é paralelo a exatamente uma geratriz.

Se o mesmo contiver tal geratriz teremos o caso degenerado de uma reta.
As curvas que estamos estudando, como lugares geométricos provém todas de secções de um cone. Os gregos descobriram estas curvas como secções planas de cones. O primeiro matemático a escrever sobre elas, sistematizando seu estudo foi Apolônio. Por causa desta relação com os cones as mesmas são agrupadas sob o nome de cônicas.

Tomemos um exemplo do corte do cone pelo plano de equação $1z - y - 2 = 0$. Este plano passa pelo ponto (0,0,1) e tem vetor raiz (0,-1,2) que lhe é perpendicular. Fazendo então $z = \frac{y}{2} + 1$ na equação do cone $x^2 + y^2 = z^2$ teremos

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{y}{2} + 1\right)^2$$

o que nos dá

$$x^2 + \frac{3}{4}y^2 - y - 1 = 0\,.$$

Calculando os invariantes obtemos $A_1 > 0\,,\ \ A_2 > 0$ e $A_3 < 0$ que é da elipse. Esta é a equação de elipses no plano xy. Sugerimos ao leitor que faça este tipo de exercício. Escolha a equação de um plano (que pode ser "chutada"), tire o valor de z e substitua na equação do cone.

Desenvolvendo chegará a uma equação do segundo grau e calculando os invariantes A_1, A_2 e A_3 saberá de que cônica se trata.

Nós definimos as cônicas como lugares geométricos, expressamo-los como soluções de equações do segundo grau reduzidas e a partir daí, através de rotações e translações obtivemos equações das cônicas em qualquer posição do plano $\mathbb{R}^2$.

Vamos agora inverter o procedimento .

Vamos considerar a equação completa do segundo grau e usar translações e rotações para tentar simplificá-las, até quando possível, na forma reduzida.

Seja então a equação

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$$

que é a completa do segundo grau em duas variáveis. Ela tem uma parte de grau dois (ou quadrática)

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

e uma parte de grau um (ou linear) $2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2$.

Sabemos, pelo nosso trabalho anterior, que a parte linear era criada por translações.

Então sua destruição será conseguida usando-se translações. Vejamos.

Vamos incorporar nesta equação geral, uma translação de vetor (r, s), que será nossa incógnita, para vermos depois se existem r e s de modo a anular a parte linear.

Assim pomos

$$a_{11}(x_1-r)^2+a_{22}(x_2-s)^2+2a_{12}(x_1-r)(x_2-s)+2a_{13}(x_1-r)+2a_{23}(x_2-s)+a_{33} = 0\,.$$

Desenvolvendo obtemos

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2(a_{13} - a_{11}r - a_{12}s)x_1 + 2(a_{23} - a_{22}s - a_{12}r)x_2 + \\ + \quad & a_{11}r^2 + a_{22}s^2 + 2a_{12}rs - 2a_{13}r - 2a_{23}s + a_{33} = 0 \end{aligned}$$

A parte quadrática permaneceu invariante.

A parte linear sofreu alteração em função de r e s . Isto nos permite perguntar: será que existem r e s que a nulam a nova parte linear? Ou seja, queremos resolver o sistema e equações

$$\begin{cases} a_{11}r + a_{12}s = a_{13} \\ a_{12}r + a_{22}s = a_{23} \end{cases}$$

Se este sistema linear tiver solução temos o vetor (r, s) cuja translação destrói a parte linear da equação original. Se tivermos $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ ou seja o invariante $A_2 \neq 0$.

O sistema tem solução. Terá solução também se os determinantes das matrizes abaixo forem nulos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Caso não se encaixe nestas duas possibilidades, não terá solução e portanto uma translação não eliminará à parte linear por completo.

Mesmo que o sistema em questão não tenha solução, podemos escolher uma das equações, por exemplo

$$a_{22}r + a_{12}s = a_{23}$$

e tomarmos uma solução, como $s = 0$ e $r = \dfrac{a_{23}}{a_{22}}$ e assim estaremos eliminando o fator que contém x_2 da parte Linear. O mesmo poderá ser feito com x_1. A escolha dependerá do caso específico.

No caso dos sistema ter solução (r, s) temos aí o vetor que dá a transláção que leva a equação original para a equação

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{11}r^2 + a_{22}s^2 + 2a_{12}rs - 2a_{13}r - 2a_{23}s + a_{33} = 0$$

ou seja, uma equação do tipo

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \alpha_{33} = 0\,.$$

Caso cheguemos a esta equação, vemos de imediato que ela é invariante pela antipodal $(x_1, x_2) \longmapsto (-x_1, -x_2)$ e portanto tem centro. Concluímos aqui que a parábola está excluída pois ela não tem centro. Daí, se quisermos prosseguir na simplificação, aplicamos uma rotação nas variáveis, com centro na origem para eliminar o termo misto. Sugerimos ao leitor que o faça.

Observe que se $F(x_1, x_2)$ designa o primeiro membro da equação original então o termo constante α_{33} é $F(-r, -s)$.

Exercícios:

Utilize translações e rotações para simplificar (se possível) as equações abaixo:

1. $35x_1^2 + 35x_2^2 - 2x_1x_2 - 34x_1 - 34x_2 - 289 = 0$

2. $3x_1^2 + 8x_2^2 + 12x_1x_2 - 18x_1 - 28x_2 + 11 = 0$

3. Dada a elipse de equação reduzida

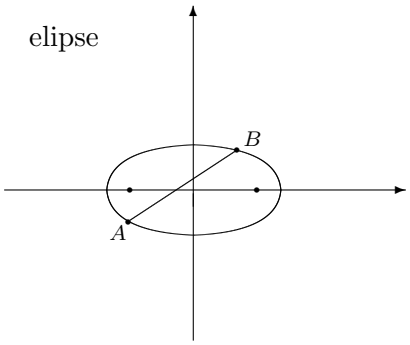
$$9x_1^2 + 16x_2^2 - 144 = 0$$

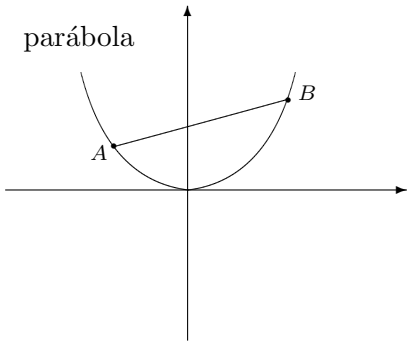
   Achar a equação da elipse que é obtida desta por uma translação de seu centro para o ponto (5,3) e cujo eixo maior passe a se apoiar na reta $y = x - 2$.

4. Dado o retângulo de vértices $(1,1)$, $(1,3)$, $(5,1)$, $(5,3)$, explicitar a equação da elipse inscrita neste retângulo, isto é, da elipse que tangencia os quatro lados deste retângulo, internamente, com os eixos paralelos aos lados do retângulo.

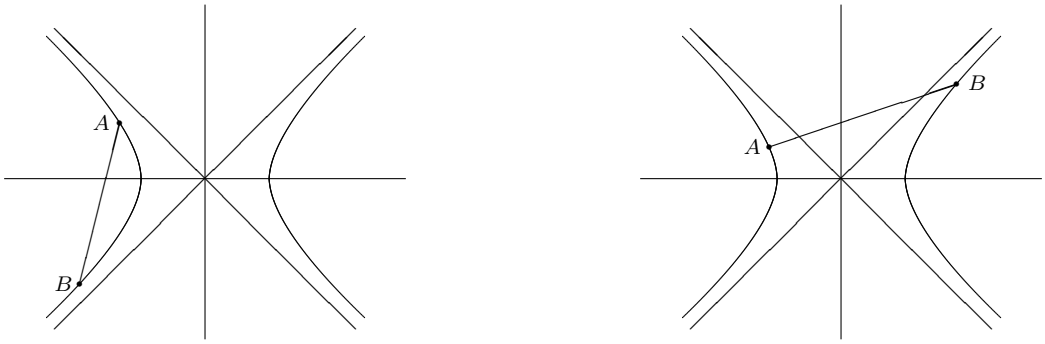
5. Dado o quadrado de vértices (1,1), (1,-1), (-1,1) e (-1,-1) e mais o ponto (3,0). Achar a equação da elipse (reduzida) que passa por estes cinco pontos.

Definição 4.4.1. *Dada uma cônica qualquer e dois de seus pontos A e B, chamamos de uma corda da referida cônica, ao segmento retílineo de extremidades A e B . Veja nas figuras abaixo*





hipérboles

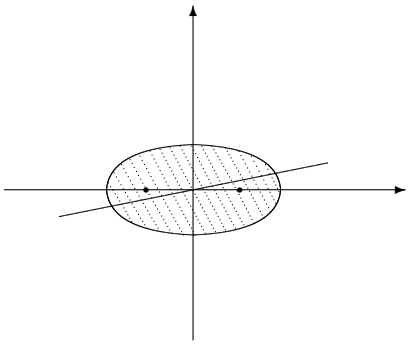


4.5 Diâmetros das cônicas

Teorema 4.5.1. *Os pontos médios de cordas paralelas, de uma cônica qualquer, estão numa mesma reta.*

Demonstração: Suponhamos que a cônica seja uma elipse, dada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Se as cordas consideradas são paralelas ao eixo y então pela simetria desta elipse em relação ao eixo x, vemos que os pontos médios das cordas estão no eixo x .,

Se as cordas não são do tipo acima então todas tem um coeficiente angular k e suas equações são então todas do tipo $y = dx + \ell$. Com k constante e variando ℓ temos todas as cordas da família de cordas paralelas em questão.

Procurando as extremidades de cada corda, para um valor de ℓ, devemos resolver então o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{\ell^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + \ell \end{cases}$$

Substituindo vem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+\ell)^2}{b^2} = 1$$

ou

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(\ell^2 - b^2) = 0\,.$$

As raízes x_1 e x_2 desta equação são as coordenadas no eixo x, das extremidades da particular corda e seu ponto médio cuja coordenada é:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}\,.$$

Mas $x_1 + x_2$ é o negativo do coeficiente de x na equação do $2^{\underline{o}}$ grau, quando dividido pelo coeficiente de x^2, logo:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2kl}{b^2 + a^2k^2}$$

donde

$$x_0 = -\frac{a^2kl}{b^2 + a^2k^2}$$

conhecendo-se x_0 otemos y_0 a partir de $y = kx + \ell$, ou seja:

$$y_0 = -\frac{a^2k^2l}{b^2 + a^2k^2} + \ell = \frac{b^2l}{b^2 + a^2k^2}\,.$$

Então temos as coordenadas do ponto médio da corda estudada

$$x_0 = -\frac{a^2kl}{b^2 + a^2k^2} \quad , \qquad y_0 = \frac{b^2l}{b^2 + a^2k^2}\,.$$

Daqui resulta que

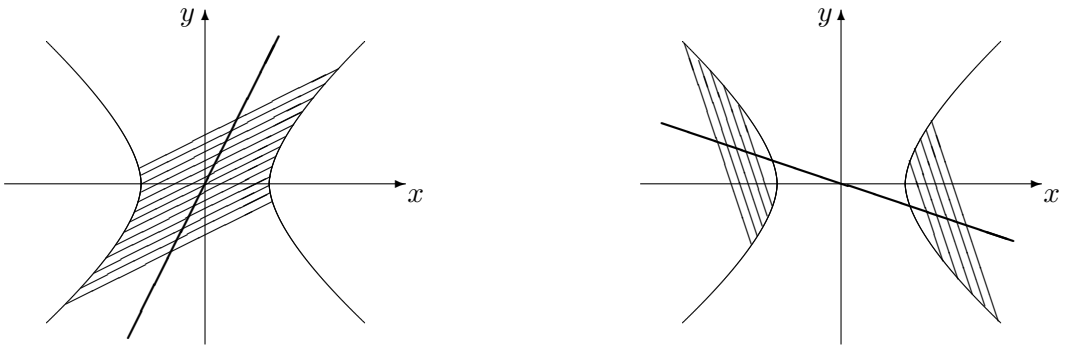
$$\frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{a^2 k}\,.$$

Então os pontos médios das cordas paralelas satisfazem a equação da reta

$$y = \left(-\frac{b^2}{a^2 k}\right) x\,.$$

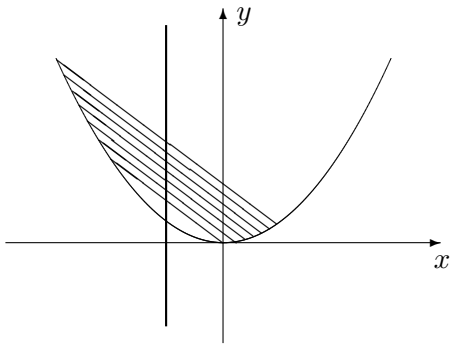
Com um procedimento análogo, conseguiremos tratar os casos da hipérbole e da parábola.
Vejamos as figuras

hipérbole



$$x_0 = \frac{a^2 k\ell}{b^2 - a^2 k^2} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{b^2 \ell}{b^2 - a^2 k^2}$$

parábola $y = \dfrac{1}{2p}\, x^2$



$x_0 = \dfrac{p}{k}$ e $y_0 = \dfrac{p = k\ell}{k^2}$

Neste caso, x_0 não depende de ℓ e portanto é o mesmo para cada corda. Neste caso então a reta é vertical, paralela ao eixo y.

Definição 4.5.2. *A reta que passa pelos pontos médios de uma família de cordas paralelas de uma cônica C é chamada de um diâmetro de C.*

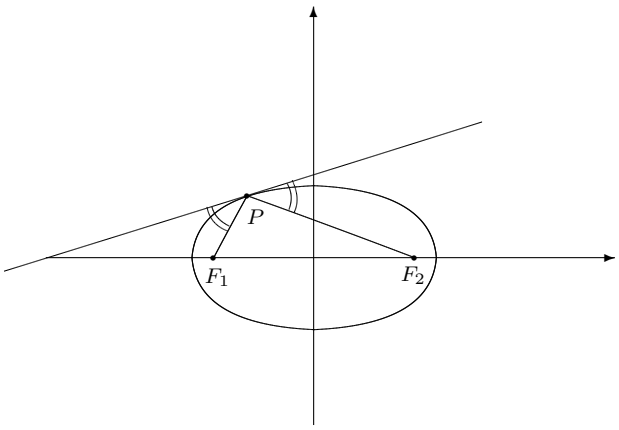
Observe, que nos casos da elipse e da hipérbole, como elas tem centro (de simetria) os diâmetros todos passam pelo centro.

No caso da parábola (que não tem centro!), os diâmetros são sempre paralelos ao seu eixo de simetria.

4.6 Propriedades óticas das cônicas

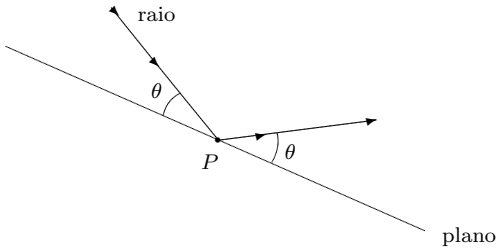
Vamos iniciar com a elipse. Precisamos de início saber como especificar a reta tangente a um ponto da elipse. A informação é:

Seja P um ponto de uma elipse E que tem focos F_1 e F_2. Os segmentos de reta que ligam P a F_1 e a F_2 são denominados de raios focais PF_1 e PF_2. A reta tangente à elipse no ponto P, passa por P e faz ângulos iguais com os raios focais passando por fora do ângulo F_1PF_2.

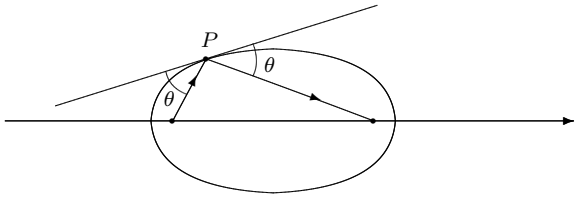


Não apresentaremos uma demonstração deste fato. Uma tal demonstração é conseguida através do cálculo, usando-se o conceito de derivada de função real. Como não estamos admitindo que o leitor tenha conhecimento de cálculo, não apresentamos tal demonstração.

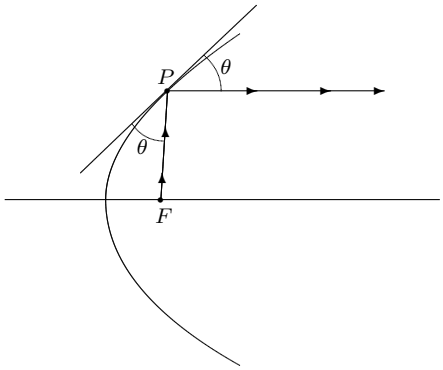
Vamos pensar agora fisicamente, com raios de luz. Sabemos que se um raio de luz atinge um espelho plano, num ponto P e formando um certo ângulo θ com o plano, o mesmo é refletido pelo plano, saindo sob o mesmo ângulo θ, como abaixo



Vamos supor nossa elipse E e seu ponto P. Se um raio de luz sai do foco F_1 e atinge o seu ponto P a reflexão é a mesma como se tivessemos a reta tangente a E em P rrefletindo e assim o raio refletido sairá na direção do raio docal PF_2. Veja na figura abaixo



Examinemos o caso da parábola



A reta tangente à parabola P num ponto P faz ângulos iguais com o raio docal PF e com a semi-reta de origem P, interna à parábola P e paralela ao eixo de simetria de P.

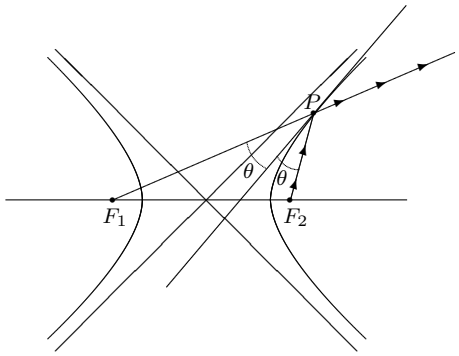
Com isso e semelhantemente ao caso anterior (elipse). Se um raio de luz é emitido a partir do doco da parábola atinge a mesma no ponto P, ele será refletido segundo a semi-reta em questão, ou seja, paralelamente ao eixo de simetria da parábola P.

A caracterização da reta tangente à parábola num ponto P tem sua semonstração também no cálculo e por isso a omitimos.

Observe que se mudarmos o percurso do raio (invertermos o seu sentido), um raio de luz que incida na parábola vindo paralelamente ao eixo da mesma será refletido na direção do foco F.

Resta agora a hipérbole.

Sejam H uma hipérbole de focos F_1 e F_2 e P um ponto de H. A reta tangente a H no ponto P faz ângulos iguais com os raios focais PF_1 e PF_2, passando por entre eles.



Assim sendo, um raio de luz que parte de um foco da hipérbole H e atinge o ponto P da mesma, será refletido como se estivesse vindo do outro foco, como na figura acima.

Excentricidade

Definição 4.6.1. *Dada uma elípse cuja distância focal seja* $2c$ *e cujo maior eixo tenha comprimento* $2a$*, sua excentricidade é*

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Como $c < a$ temos $\varepsilon < 1$. Lembremos que $c^2 = a^2 - b^2$ onde b é o semi-eixo menor da elipse. Então podemos tirar que:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \qquad \text{e}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{e} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Assim, a excentricidade caracteriza a forma da elipse. Se a excentricidade se aproxima de zero, é porque $\frac{b}{a}$ se aproxima de um e portnto a elipse tem a forma próxima de um e portanto a elipse tem a forma próxima de um círculo, que tem $a = b$ e $\varepsilon = 0$. Se a mesma se aproxima de um então $\frac{b}{a}$ se aproxima de zero, isto é, b é muito menor do que a e a elipse tem uma forma alongada, na direção do eixo que contém os focos.

Definição 4.6.2. *Seja a hipérbole de equação* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

A distância entre os focos da mesma é $2c$ onde $c^2 = a^2 + b^2$ e a distância entre os vértices desta jipérbole (pontos com $x = 0$) é $2a$. Sua excentricidade é

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} .$$

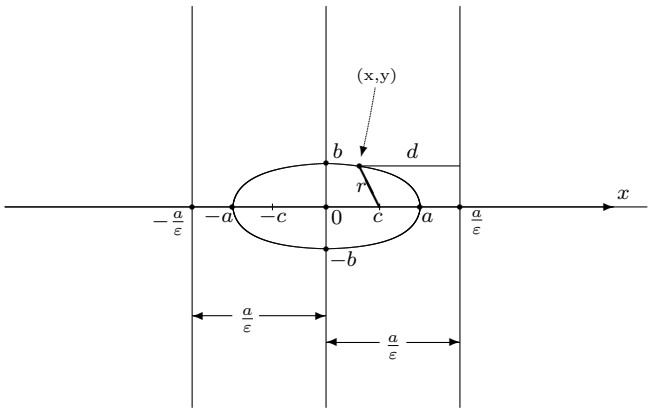
Como para uma hipérbole $c > 0$ temos $\varepsilon > 1$ visto que $c^2 = a^2 + b^2$ tiramos que

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{e} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} .$$

Portanto ε determina e é determinado por $\frac{b}{a}$ e assim determina a forma da hipérbole (a menos de escala). No caso de uma hipérbole quadrada (ou equilátera) $a = b$ temos $\varepsilon = \sqrt{2}$.

4.7 Diretrizes da elipse

Dada uma elipse qualquer (que não seja um círculo com $a > b$ e portanto $\varepsilon \neq 0$. As duas retas perpendiculares ao grande eixo e dispostos simetricamente em relação ao seu centro, a uma distância $\frac{a}{\varepsilon}$ deste centro são chamadas de diretrizes da elipse



As equações das diretrizes em coordenadas cartesianas são $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ e $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$. Chamamos a $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ de primeira diretriz e a $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ de segunda diretriz.

Como na elipse $\varepsilon < 1$, $\dfrac{a}{\varepsilon} > a$ e assim as retas diretrizes estão fora da elipse, como na figura acima.

Teorema 4.7.1. *Sejam r a distância de um ponto da elipse a um dos focos e d a distância deste ponto à diretriz mais próxima deste foco. A razão $\dfrac{r}{d}$ é então uma constante igual à excentricidade da elipse, $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$ ou $r = \varepsilon\, d$.*

Demonstração: Para especificar melhor, digamos que se trata do foco direito $(c, 0)$ e da segunda diretriz $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da elipse. A distância de à segunda diretriz é $d = \dfrac{a}{\varepsilon} - x$. A distância de P ao foco direito é

$$r = a - \varepsilon, x$$

pois temos que

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad \text{ou} \quad \varepsilon\, a = c \quad \text{e} \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2\,, \quad c^2 + b^2 = a^2\ .$$

Examinando a figura acima temos que

$$r^2 = (c - x)^2 + y^2$$

ou

$$r^2 = c^2 + x^2 - 2cx + y^2 = c^2 + x^2 - 2a\varepsilon x - y^2$$

Da equação da elipse tiramos que

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\, x^2 \ ,$$

logo

$$\begin{aligned} r^2 &= c^2 + x^2 - 2a\varepsilon x + b^2 - \frac{b^2}{a^2}\, x^2 = c^2 + x^2 - 2a\varepsilon x + b^2 - (1-\varepsilon^2)x^2 = \\ &= a^2 - b^2 + x^2 - 2a\varepsilon x + b^2 - x^2 + \varepsilon^2 x^2 = a^2 + \varepsilon^2 x^2 - 2a\varepsilon x = (a - \varepsilon x)^2 \end{aligned}$$

donde

$$r = a - \varepsilon\, x \ .$$

Calculando $\dfrac{r}{d}$ temos

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{(a - \varepsilon x)\varepsilon}{a - \varepsilon x} = \varepsilon$$

e portanto $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$ independe de (x, y) na elipse, como queríamos. □

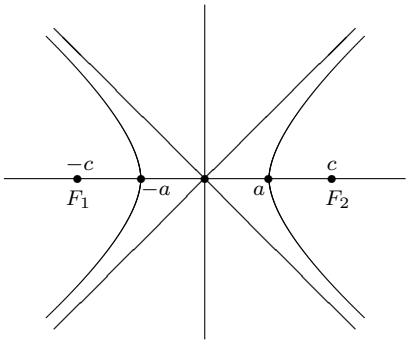
Lembremos que na equação reduzida uma hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que a posição dos focos F_1 e F_2 são $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ com $c > 0$, que para $y = 0$ temos as coordenadas dos vértices (pontos onde a hipérbole corta o eixo x)

$$v_1 = (-a, 0) \quad \text{e} \quad v_2 = (a, 0) \quad \text{onde} \quad a > 0\,.$$

Vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$.



Definição 4.7.2. *Dada uma hipérbole cuja distância focal seja* $2a$ *e cuja distância entre os vértices seja* $2a$ *, sua excentricidade é dada por* $\dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a} = \varepsilon$ *.*

Como na hipérbole $c > 0$, sua excentricidade é $\varepsilon > 1$. Como $c^2 = a^2 + b^2$, temos

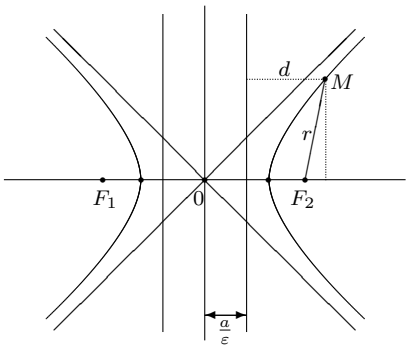
$$\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad \text{e}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{e} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}\,.$$

Portanto a excentricidade determina e é determinada pela razão $\dfrac{b}{a}$. A excentricidade determina a forma da hipérbole, ou seja, determina a mesma, a menos de homotetia (escala). No caso de $a = b$ temos a hipérbole a que chamamos equilátera e neste caso $\varepsilon = \sqrt{2}$.

4.8 Diretrizes da hipérbole

Definição 4.8.1. *Chamam-se diretrizes da hipérbole* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *as duas retas perpendiculares ao eixo* x *e dispostas simetricamenre em relação ao seu centro* 0 *a uma distância igual a* $\dfrac{a}{\varepsilon}$ *, dele.*



Como para a hipérbole $\varepsilon > 1$, temos $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$.

Teorema 4.8.2. *Sejam r a distância de um ponto M qualquer da hipérbole a um dos focos F e d a distância dese mesmo ponto M à diretriz correspondente ao mesmo foco F . A razão $\dfrac{r}{d}$ é então uma constante igual à sua excentricidade*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \qquad ou \qquad r = \varepsilon d \ .$$

Pela figura acima temos $d = x - \dfrac{a}{\varepsilon}$.

A distância de M ao foco F_2 é

$$r = \varepsilon\, x - a \, .$$

O ponto M encontra-se no ramo direito da hipérbole. Daí temos:

$$\frac{r}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(\varepsilon x - a)\varepsilon}{\varepsilon x - a} = \varepsilon$$

que independe de M na hipérbole.

Se o ponto M se encontra no ramo esquerdo da hipérbole, teremos

$$d = |x| + \frac{a}{\varepsilon}$$

mas, nesta posição x é negativo, logo $|x| = -x$ e

$$d = |x| + \frac{a}{\varepsilon}$$

e

$$r = -(\varepsilon x - a)$$

e chegamos a

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \, .$$

As propriedades da elipse e da hipérbole expressas em função de suas excentricidades podem ser usadas para definí-las, alternativamente, como: o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias r a um ponto fixo (foco) e d a uma reta fixa (diretriz) a constante $\frac{r}{d} = \varepsilon$ (constante). Será uma elipse se $\varepsilon < 1$; uma hipérbole se $\varepsilon > 1$.

No caso de $\varepsilon = 1$, ou seja, $r = d$, teremos a curva denominada de parábola.

Assim sendo a razão $\frac{r}{d} = \varepsilon$ constante a partir de um ponto (foco) e uma reta diretriz, serve para definir qualquer cônica

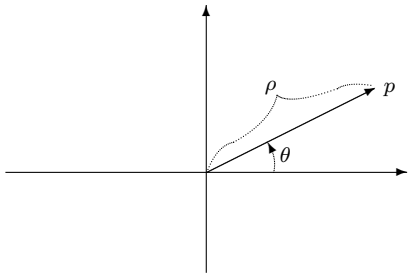
$$\begin{array}{ll} \frac{r}{d} = \varepsilon < 1 & \text{elipse} \\ \frac{r}{d} = \varepsilon > 1 & \text{hipérbole} \\ \frac{r}{d} = \varepsilon = 1 & \text{parábola} \end{array}$$

A excentricidade, quando vista desta forma $\frac{r}{d} = \varepsilon$ nos permite incluir a parábola nesta caracterização, pois para ela $r = d$ e portanto sua excentricidade $\varepsilon = 1$.

Capítulo 5

Coordenadas polares

Temos trabalhado com coordenadas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, que chamamsos de cartesianas. Dado um ponto p, projetamo-lo nos eixos, para obter suas coordenadas. Vamos introduzir no plano $\mathbb{R}^2$ um outro tipo de coordenada que leva em conta, não as projeções nos eixos, mas sim a distância do ponto p à origem, que denotamos com a letra grega ρ e o ângulo θ que o vetor p forma com o eixo x, medido no sentido anti-horário. θ é em radianos.



Os dois valores ρ e θ identificam o ponto $p \neq 0$. Se $p = 0$ teremos necessariamente $p = 0$ mas θ fica indefinido, já que não dá para definir ângulo entre o vetor nulo e o eixo x.

Denotamos as duas coordenadas polares na ordem $p = (\rho, \theta)$.

Exercícios: Transforme as coordenadas polares abaixo, em coordenadas cartesianas.

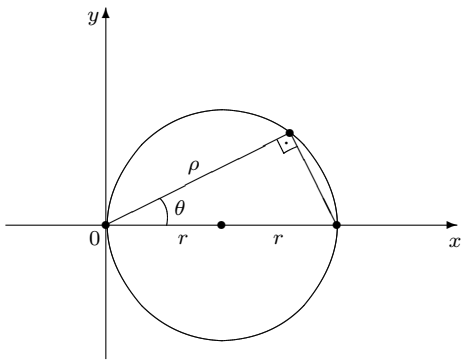
1. $(\rho, \theta) = (1\,,\, \frac{\pi}{2})$
2. $(\rho, \theta) = (1\,,\, -\frac{\pi}{4})$
3. $(\rho, \theta) = (1\,,\, \frac{\pi}{4})$
4. $(\rho, \theta) = (2\,,\, -\frac{\pi}{4})$
5. $(\rho, \theta) = (5\,,\, \pi)$
6. $(\rho, \theta) = (\rho\,,\, \theta)$

As coordenadas polares simplificam certas equações. Por exemplo, a equação de um círculo $x^2 + y^2 = r^2$ fica, em coordenadas polares, apenas $\rho = r$ (θ qualquer).

Uma reta pela origem $ax + by = 0$ fica $\theta = \theta_0$ constante (e ρ qualquer) onde θ e o ângulo entre a reta (orientada) e o eixo x.

Se $\theta = \theta_0$ é a equação da reta com uma orientação, ao invertemos a orientação a equação da mesma reta fica $\theta = \theta_0 + \pi$.

Um círculo de centro em $(r, 0)$ e raio $r > 0$ tem equação cartesiana $(x-r)^2+y^2 = r^2$ e equação polar $\rho = 2r\cos\theta$

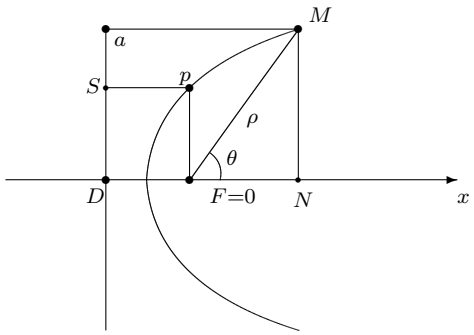


Vejamos como ficam as equações das cônicas, nas posições canônicas em coordenadas polares.

5.1 Equação polar das cônicas

Consideremos uma qualquer das cônicas. No caso da hipérbole consideramos apenas um dos ramos (componentes). Designemos tal curva por L.

Seja F seu foco e g sua geratriz. Foco e geratriz mais próximos do ramo considerado (caso se trate da hipérbole). Introduzimos o sistema de eixo, de modo que o foco coincida com a origem e o eixo x na direção do eixo da curva e no sentido oposto de onde está a diretriz. Veja a figura abaixo



Usaremos a relação $\frac{r}{d} = \varepsilon$ para se obter a equação polar.

Tendo-se em conta que o foco está na origem temos que para o r acima $r = \rho$.

Veja a figura acima.

$$d = QM = DN = DF + FN = DF + \rho\cos\theta\,.$$

Seja p o comprimento de FP. p é a metade da corda focal de L, perpendicular ao seu eixo.

Devido a $\frac{r}{d} = \varepsilon$, temos para P

$$\frac{FP}{SP} = \varepsilon\,.$$

Logo $SP = \dfrac{FP}{\varepsilon} = \dfrac{p}{\varepsilon}$. Mas $SP = DF$, donde

$$DF = \frac{p}{\varepsilon}$$

e

$$d = \frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\theta$$

substituindo em $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$ temos

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\theta} = \varepsilon$$

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

que é então a equação da cônica L em coordenadas polares. Elipse para $0 < \varepsilon < 1$, hipérbole (um ramo) para $\varepsilon > 1$ e parábola para $\varepsilon = 1$.

Exercícios:

1. Calcule as excentricidades das elipses
   a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
   b) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
   c) $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{10} = 1$
2. Calcule as excentricidades das hipérboles
   a) $x^2 - y^2 = 1$
   b) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$
   c) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
3. Dar a equação reduzida da elipse de excentricidade $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ que tem distância focal 4.

4. Dar a equação reduzida da elipse de excentricidade $\varepsilon = \sqrt{2}$ que tem distância focal 10 .

5. Considere a parábola com vértice na origem, está no semiplano com $y \geq 0$ e tem foco em $(0, 7)$.

6. Dar a equação da parábola que está no semiplano superior ($y \geq 0$), tem o vértice na origem e foco em $(0, 3)$.

7. Considere a parábola obtida em (6) e a corda que liga a origem ao ponto $(3\sqrt{12}\,,\, 3)$ da parábola. Dê a equação da reta que passa pelo ponto médio desta corda e pelos pontos médios de todas as cordas paralelas a esta.

8. Dê a equação reduzida da hipérbole com excentricidade $\varepsilon = 2$ e distância focal 8.

9. Dar a equação da elipse com focos $F_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $F_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e semi-eixo maior que 4.

10. Quais são as equações das retas diretrizes da elipse de equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \ .$$

Assim como existem curvas, no plano $\mathbb{R}^2$, representadas analiticamente por equações do segundo grau, em duas variáveis, existem no espaço $\mathbb{R}^3$, representada por equações do segundo grau, em três variáveis, superfícies e é para elas que nos dirigimos agora.

Capítulo 6

Superfícies

Agora retornamos no $\mathbb{R}^3$ onde temos a intenção de estudar superfícies ditas de grau dois ou quadráticas.

Mas, inicialmente, vamos dar uma olhada nas noções de reta e plano.

Para a reta no $\mathbb{R}^3$ é conveniente começarmos com sua equação paramétrica. Para isto, como no caso do $\mathbb{R}^2$, precisamos de um vetor diretor v e um ponto por onde a reta passa, que tem exatamente a mesma forma que no caso $\mathbb{R}^2$.

$$r(t) = tv + u\,.$$

A diferença aqui é que os vetores v e u estão em $\mathbb{R}^3$ e portanto são do tipo

$$v = (a, b, c)$$
$$u = (a_0, b_0, c_0)$$

e a equação acima explicitada em coordenada fica

$$r(t) = (ta, tb, tc) + (a_0, b_1, c_0)$$

ou se quisermos $r(t) = (x, y, z)$ teremos

$$\begin{cases} x = ta + a_0 \\ y = tb + b_0 \\ z = tc + c_0 \end{cases}$$

Todas estas formas de expressão para $r(t)$ são equivalentes.

Se a reta passa pela origem então sua equação paramétrica se simplifica para $r(t) = tv$.

6.1 O plano

Temos também no $\mathbb{R}^3$ o produto escalar

$$u = (a, b, c) \qquad v = (x, y, z)$$

$$\langle u, v \rangle = ax + by + cz\,.$$

Se fixarmos o vetor u e deixarmos v livre, a equação

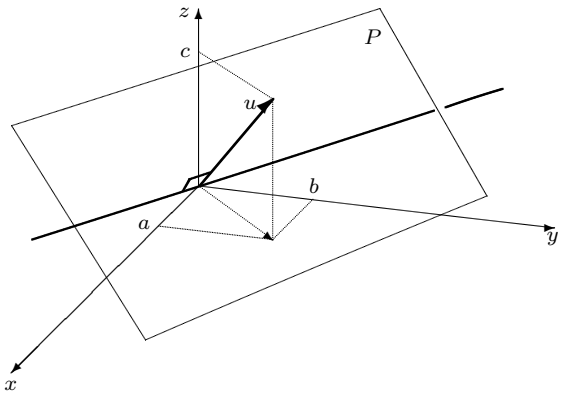
$$\langle u, v \rangle = 0$$

ou

$$ax + by + cz = 0$$

tem para solução os vetores (x, y, z) que são perpendiculares a u, que é constante.

Vemos que, no $\mathbb{R}^3$, intuitivamente o conjunto de soluções constituem um plano P, que é perpendicular a u.



Assim sendo as equações do tipo

$$ax + by + cz = 0$$

são equações de planos, que passam pela origem pois o vetor $(0, 0, 0)$ é solução destas.

Analogamente ao caso da reta em $\mathbb{R}^2$, chamamos o vetor (a, b, c) que está na equação

$$ax + by + cz = 0$$

de vetor raiz do plano que ela representa.
Agora, vamos aplicar a $\mathbb{R}^3$ a translação pelo vetor $\left(0, 0, \frac{d}{c}\right)$, isto é,

$$(x, y, z) \longmapsto \left(x + 0\,,\, y + 0\,,\, z + \frac{d}{c}\right) = \left(x\,,\, y\,,\, z + \frac{d}{c}\right)\,.$$

e impomos, que após a translação, o vetor deva satisfazer a equação acima, ou seja,

$$ax + by + c\left(z + \frac{d}{c}\right) = 0$$

esta se transforma em

$$ax + by + cz + d = 0\,.$$

Mas então esta é a equação de um plano no $\mathbb{R}^3$ paralelo a aquele de equação $ax + by + cz = 0$, já que é um transladado daquele. Assim sendo, o vetor (a, b, c) é perpendicular a ambos os planos paralelos.

Feitas esta considerações pomos

Definição 6.1.1. *Um plano, no $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de soluções de uma equação do tipo*

$$ax + by + cz + d = 0$$

onde o vetor (a, b, c) não seja nulo

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)\,.$$

Se $d = 0$ temos o plano dado pela equação

$$ax + by + cz = 0$$

que então passa pela origem. Se $d \neq 0$ o plano de equação $ax+by+cz = 0$ é paralelo ao de equação $ax + by + cz + d = 0$.

Dada a equação $ax + by + cz + d = 0$ podemos escrever a

$$ax + by + cz = 0$$

a que chamamos de equação homogênea associada à anterior. Estas equações de planos são ditas equações cartesianas por expressarem os planos em coordenadas cartesianas (x, y, z). Temos também as equações paramétricas de planos, assim:
Sejam dois vetores u e v do $\mathbb{R}^3$, não colineares e fixados. Estes determinam um plano P, que os contém. Cada ponto w deste plano pode ser expresso assim:

$$w = \lambda u + \mu v$$

com λ e μ escalares e todo vetor do tipo $\lambda u+\mu v$ está neste plano P. Assim chamamos de equação paramética do plano P a

$$P(\lambda, \mu) = \lambda u + \mu v$$

onde λ e μ percorrem os números reais $\mathbb{R}$. λ e μ são chamados de parâmetros da equação. Aos vetores u e v chamamos de uma base do plano.

Se o plano passa por um certo ponto w e tem base u e v, sua equação paramétrica toma a forma:

$$P(\lambda, \mu) = \lambda u + \mu v + w\,.$$

Um plano assim, em geral, não passa pela origem.

Suponhamos que temos um plano P dado por uma equação paramétrica como acima e queremos encontrar sua equação cartesiana, ou seja, sua equação, da forma

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\,.$$

A primeira coisa a se procurar é um seu vetor raiz (α, β, γ). Sabemos que os vetores u e v da paramétrica são vetores paralelos ao plano que descreve. Se quisermos um que lhe seja perpendicular (raiz) tomamos o produto vetorial de u e v. Para simplificarmos a notação vamos considerar o caso particular em que a base de P seja dada por

$$u = (2, 3, 1) \quad \text{e} \quad v = (1, 5, 1)\ .$$

Assim teremos para produto vetorial de u com v,

$$\begin{aligned} u \times v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} &= 3e_1 + e_2 + 10e_3 - 3e_3 - 2e_3 - 2e_2 - 5e_1 \ = \\ &= (3-5)e_1 + (1-2)e_2 + (10-3)e_3 \ = \\ &= -2e_1 - e_2 + 7e_3 \end{aligned}$$

e temos o vetor raiz para o plano que é

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (-2, -1, 7)$$

e podemos escrever que a equação cartesiana do plano é do tipo

$$-2x - y + 7z + d = 0$$

onde d será determinado pelo ponto w onde o plano passa, ou seja, se $w = (5, -1, 3)$ temos que

$$(-2) \cdot 5 + ??? + 7 \cdot 3 + d = 0 \quad \text{ou} \quad d = -12$$

e finalmente a equação cartesiana do plano é

$$-2x - y + 7z - 12 = 0 \ .$$

Exercícios: Achar as equações cartesianas dos planos que exibem a equação paramétrica

$$P(\lambda, \mu) = \lambda u + \mu v + w$$

em que

1. $u = (0, 1, 2),\ v = (3, -1, 2)$ e $w = (1, 1, 3)$
2. $u = (1, -1, 3),\ v = (3, 1, -1)$ e $w = (0, 1, 5)$
3. $u = (1, 4, -1),\ v = (3, -1, 2)$ e $w = (5, 6, 7)$

Nós não apresentamos ao leitor o que seria a equação cartesiana da reta no $\mathbb{R}^3$. A equação cartesiana da reta no $\mathbb{R}^2$ tem a forma

$$ax + by + c = 0 \, .$$

Quando passamos para $\mathbb{R}^3$ a equação cartesiana natural é a do tipo

$$ax + by + cz + d = 0$$

que sabemos representar um plano. Portanto, se quisermos representar uma reta em coordenadas cartesianas, devemos obtê-la como a intersecção de dois planos, o que equivale a determinar o conjunto de soluções de um sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \gamma \end{cases}$$

que dá exatamente a intersecção dos planos

$$\begin{aligned} &ax + by + cz - d = 0 \quad \text{e} \\ &\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta = 0 \end{aligned}$$

Como nós temos aí duas equações a três icógnitas, escolhemos uma, cujo coeficiente não seja nulo e expressamos as outras duas em função desta.

Digamos que $a \neq 0$ e escolhemos x como a incógnita livre.

Assim, após resolvermos o sistema vamos obter y e z em função de x e as soluções, que estarão numa reta (intersecção dos dois planos) se expressarão como o conjunto r

$$r = \{(x, y, z \mid x = x,\ y = y(x) \ \text{ e } \ z = z(x)\}$$

Vamos atribuir valores àqueles coeficientes e resolver um caso. A reta será então a intersecção dos planos dados por

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 4y - 3z = 7 \end{cases}$$

$$2x = y - z \qquad\qquad x = \frac{1}{2}(y - z)$$

$$\frac{1}{2}(y-2)+4y-3z = 7 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{2}-\frac{z}{2}+4y-3z = 7 \quad \text{ou} \quad \frac{9}{2}\,y-\frac{7}{2}\,z = 7 \quad \text{ou} \quad 9y-7z = 14$$

donde $z = \dfrac{9}{7}\,y - 2\,.$ Substituindo na primeira vem

$$2x - y + \left(\frac{9}{7}\,y - 2\right) = 1$$

$$2x - y + \frac{9}{7}\,y = 3 \qquad \text{ou} \qquad 2x + \frac{2}{7}\,y = 3$$

donde $y = \dfrac{21}{2} - x\,.$ Então as coordendas solução são do tipo

$$\left(x\,,\ \frac{21}{2} - x\,,\ \frac{161}{14} - \frac{9}{7}\,x\right)\ .$$

Temos aí um parâmetro x, que ao variar nos reais $\mathbb{R}$ faz o ponto percorrer a reta.

Podemos escrever tal ponto como:

$$\left(x\,,\,\frac{21}{2}-x\,,\,\frac{161}{14}-\frac{9}{7}\,x\right)=x\left(1\,,\,-1\,,\,-\frac{9}{7}\right)+\left(0\,,\,\frac{21}{2}\,,\,\frac{161}{14}\right)$$

ou seja, obtemos a reta na forma paramétrica onde o parâmetro é especial, pois é a primeira coordenada x.

Exercícios:

1. Achar a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto $p=(3,-1,5)$ e que é perpendicular ao plano da equação $x+5y-7z+1=0$.

2. O mesmo que (1) para $p=(0,1,2)$ e $3x-4y+7z+10=0$.

3. Achar a equção cartesiana do plano que contém as duas retas

$$r(t)=t(1,2,3)+(0,1,2)$$

$$s(t)=t(-1,5,8)+(0,1,2)$$

4. Achar a equação do plano P que seja paralelo ao plano da equação $x-y+3z+2=0$ e P passando pelo ponto $(3,3,7)$.

6.2 Quádricas

Trataremos agora as superfícies do segundo grau ou quádricas.

6.2.1 Esferas

A quádrica mais simples é a esfera bidimensional. A esfera S^2 com centro na origem e raio 1 é dada pela condição que seus pontos distam da origem de uma unidade. Se (x,y,z) é de S^2 então vale que

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$$

já que tomamos raiz não negativa, esta é equivalente a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,.$$

Esta é uma equação do segundo grau nas três variáveis a que chamamos de equação de S^2, tem centro zero e raio um. Chamamos esta esfera de esfera unitária (por causa do raio).

Se o centro é a origem de $\mathbb{R}^2$ e o raio da esfera é r, sua equação é

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\,.$$

Uma notação para esta esfera é S_r^2.
Se o centro está num ponto $v_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e o raio é r temos a equação da esfera sendo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\,.$$

Desenvolvendo chegaremos a

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2\,.$$

Denotemos uma tal esfera por $S_r^2(v_0)$

Observe que o que fizemos para passar de S_r^2 para $S_r^2(v_0)$ foi aplicarmos a S_r^2 uma translação de vetor v_0. Como já acontecia antes com as cônicas, a translação não afetou a parte do segundo grau de S_r^2. Ele introduziu uma parte linear $-2(x_0x + y_0y + z_0z)$ e mudou o termo constante. Então

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

se transformou em

$$(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x_0x + y_0y + z_0z) + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2) = 0\,.$$

Se aplicarmos a S_r^2 uma rotação qualquer em torno da origem, esta fica invariante e portanto sua equação não muda.

Como o raio $r \neq 0$ podemos dividir ambos os membros da equação da esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

por r^2 e obtemos

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1\,.$$

6.2.2 O elipsóide

Podemos especular o que acontece se usarmos parâmetros diferentes nos denominadores, como

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

Se os parâmetros a, b e c estiverem muito próximos de r, deveremos ter aí uma superfície muito próxima da esfera de raio r, não é mesmo?!!!

A maneira natural universal de se tentar conhecer ou ter uma descrição de uma superfície, é fazer secções da mesma por planos especiais, como aqueles paralelos aos planos coordenados.

Vamos então cortar a superfície

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

pelo plano $z=k$. Substituindo vem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}=1\,.$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}\,.$$

Como o primeiro membro é positivo concluímos que para que o plano encontre a superfície devemos ter $1-\dfrac{k^2}{c^2}>0$ ou seja $-a<k<c$ e neste caso a curva intersecção tem equação

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a\sqrt{c^2-k^2}}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b\sqrt{c^2-k^2}}{c}\right)^2}=1$$

que é a equação reduzida de uma elipse.

Portanto toda secção da superfície em questão com plano $z=k$ produz elipses.

Se usarmos planos do tipo $x = k$ ou $y = k$ obteremos igualmente elipses. Esta superfície é de fato uma "deformação"da esfera de centro 0 e raio r, original.

Tal deformação pode ser provocada por uma aplicação linear especial L, a de matriz

$$[L] = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Consideremos sua inversa

$$[L] = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

e tomemos a equação de nossa superfície, que chamamos de S :]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

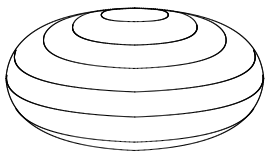
que pode ser escrita como

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

Então um ponto (x, y, z) para estar na superície S deve satisfazer a equação acima, mas isto é o mesmo que dizer que um ponto (x, y, z) está em S se e só se $L^{-1}(x, y, z)$ está na esfera unitária e portanto L leva a esfera unitária em S .

Definição 6.2.1. *Chamamos a superfície de equação (reduzida)* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *de elipsóide de semi-eixos a, b e c .*

O elipsóide tem o aspecto de uma oval como abaixo .

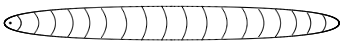


Esta foi girada em torno do seu eixo menor c e tem o aspecto achatado de uma bolacha.

Se girarmos a elipse em torno de seu eixo maior a obtemos o elipsóide de revolução

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

que tem um aspecto alongado, de um charuto

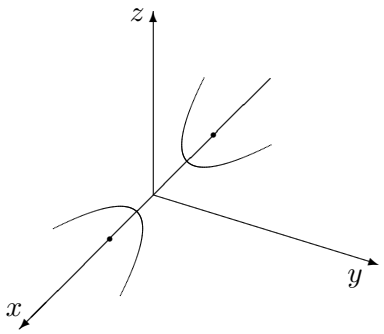


6.2.3 O hiperbolóide

Tomemos a hipérbole no plano x,z na equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Esta hipérbole tem os focos no eixo x .



Girando esta hipérbole em torno do eixo z , ela varrerá no espaço a superfície de equação

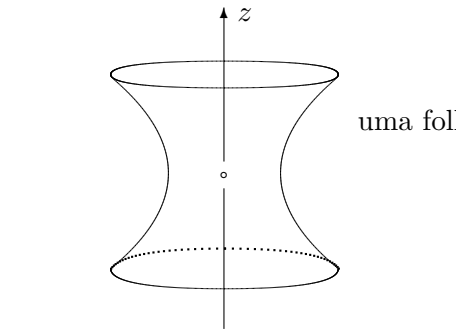
$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Os planos $z = k$ cortarão tal superfície em círculos, exatamente os círculos, que cada ponto da hipérbole original, percorre quando a giramos em torno do eixo z.

Este é o hiperbolóide de revolução e chamado de uma folha já que tem apenas uma componente, contrastando com o hiperbolóide de revolução de duas folhas que se obtém girando a mesma hipérbole em torno do eixo x.



uma folha

duas folhas

Girando-se a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

em torno do eixo x obtemos a equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que é então a equação reduzida do hiperbolóide de revolução de duas folhas.

A equação geral reduzida do hiperbolóide de uma folha é então

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

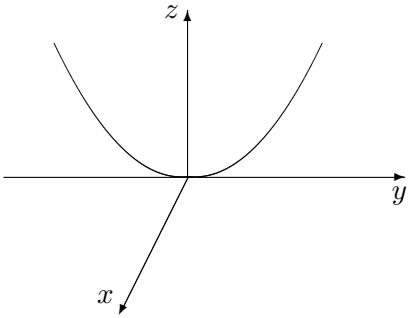
e a de duas folhas é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

6.2.4 O parabolóide

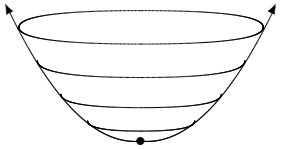
Temos agora as quádricas ligadas a parábola. Vejamos primeiramente as de revolução, isto é, giramos uma parábola, assim:

Consideremos a parábola mais popular que é a de equação $z = y^2$ do plano yz.



Se girarmos esta parábola em torno do eixo z criaremos uma superfície de revolução a que chamamos de parabolóide de revolução, cuja equação é

$$x^2 + y^2 - z = 0$$



O ponto $0 = (0, 0, 0)$ é chamado de vértice do parabolóide.

A equação geral deste tipo de parabolóide é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kz = 0 \ , \quad k \neq 0$$

As secções horizontais por planos z=constante serão elipses e não círculos como no anterior que era de revolução.

Podemos ainda girar a parábola $z = Y^2 + c$ digamos com $c > 0$, em torno do eixo y. Obteremos assim uma superfície bem diferentes da anterior cuja equação é:

$$x^2 + z^2 = y^4 + 2cy^2 + c^2$$

ou

$$y^4 - x^2 - z^2 + 2cy^2 + c^2 = 0$$

Esta é de grau 4 e portanto está excluída da família das quádricas que devem ser representadas por equações em três variáveis e serem de grau 2. Os parabolóides até agora são os de revolução:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - kz = 0 \ , \quad k \neq 0$$

ou o parabolóide elítico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - kz = 0 \ , \quad k \neq 0$$

6.2.5 Parabolóide hiperbólico

Há ainda mais um tipo de parabolóide que é o chamado parabóloide hiperbólico que tem equação

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - kz = 0 \ , \quad k \neq 0$$

Para $x = 0$ temos $\dfrac{y^2}{b^2} = kz$ ou

$$z = \frac{y^2}{b^2 k}$$

que é uma parábola no plano yz .

Para $y = 0$ obtemos

$$z = \frac{x^2}{a^2 k}$$

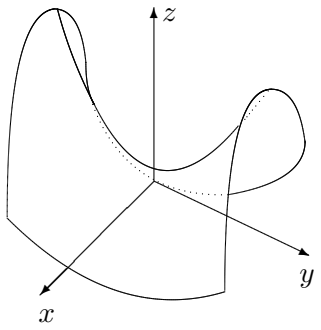
que é uma parábola no plano xz .

Obteremos parábolas sempre que cortarmos esta superfície por planos $x = r$ ou $y = r$.

Se fizermos $z = z_0$ constante obteremos sempre hipérboles

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = kz_0 \ .$$

Daí chamarmos esta quádrica de parabolóide hiperbólico. Esta superfície tem uma parte limitada em torno da origem parecida com uma sela de cavalo, por isso é também chamada simplemente de sela.



6.2.6 Superfícies regradas

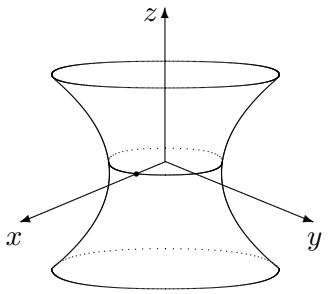
Definição 6.2.2. *Dizemos que uma superfície S é regrada se a mesma é uma união de retas do $\mathbb{R}^3$.*

Exemplos:

- Os planos são regrados pois cada um pode ser expresso como uma união de um feixe re retas paralelas.

- Os híperbolóides de uma folha. Vejamos:
  Consideremos inicialmente um hiperbolóide de uma folha e de revolução

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



No plano x, y de equação $z = 0$ temos o círculo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1$$

ou

$$x^2 + y^2 = a^2$$

que é o círculo de raio $a > 0$.

Tomemos o ponto $p = (a, 0, 0)$ e consideremos o plano do $\mathbb{R}^3$ de equação $x = a$. A intersecção deste plano com o hiperbolóide em questão é:

$$\frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

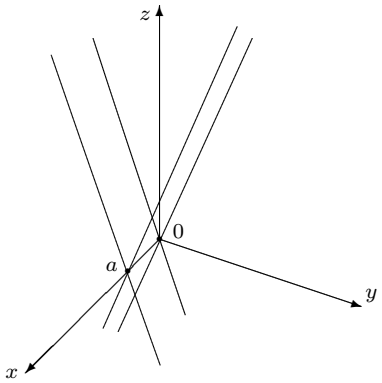
que nos dá

$$\frac{y}{a} = \pm\frac{z}{c}$$

que são duas retas

$$y = \frac{a}{c}\,z \quad \text{e} \quad y = -\frac{a}{c}\,z\ .$$

Estas retas, do plano yz, são de fato a projeção, neste plano, das duas retas que estão no hiperbolóide e no plano $x = a$.



Tomemos a reta do hiperbolóide que se projeta em $y = \dfrac{a}{c}\,z$.

Esta reta tem vetor diretor $\left(0, 1, \dfrac{c}{a}\right)$ e passa por $(a, 0, 0)$. Sua equação paramétrica é:

$$r(t) : t\left(0, 1, \frac{c}{a}\right) + (a, 0, 0)$$

ou

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= t \\ z &= t\,\frac{c}{a} \end{aligned}$$

Esta reta está no plano $x = a$ e no hiperbolóide em questão. Dado o fato de que nosso hiperbolóide é de revolução (em torno do eixo z), ao girarmos o mesmo, a reta acima varrerá a mesma superfície e portanto o hiperbolóide de revolução é

uma superfície regrada.

Passemos para o caso do hiperbolóide de uma folha. Sua equação é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

e portanto a secção $z = 0$ nos dá uma elípse.

O que faremos é mostrar que o hiperbolóide anterior (onde $a = b$) e este, estão ligados por uma aplicação linear inversível. Como aplicações lineares preservam retas, concluiremos que o caso geral acima é também regrada. Vejamos: definimos a seguinte aplicação linear

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

que tem matriz

$$[L] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta aplicação linear tem inversa e leva o ponto (x, y, z) em $(x, \frac{a}{b}\, y, z)$. Se este último estiver no hiperbolóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\frac{a^2}{b^2}\, y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que resulta em:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \ .$$

Portanto este último é o transformado do primeiro (de revolução) pela transformação linear L^{-1}. Como dissemos, como L^{-1} e L preservam retas se o inicial é regrado o último também o é.

Vejamos agora a quádrica que se chama parabolóide hiperbólico. Esta tem sua equação reduzida na forma

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} - z = 0 \ .$$

Vejamos como transformar esta na equação mais simples $y^2 - x^2 = z$.

Usaremos para isto a transformação linear L que tem matriz

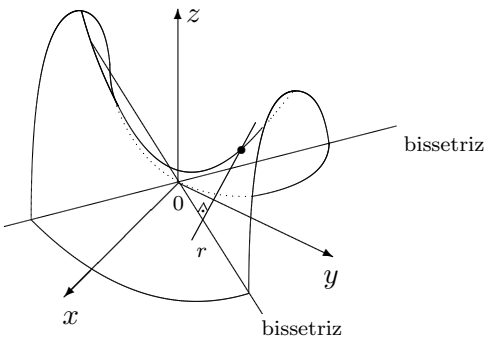
$$[L] = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e que transforma a equação acima em

$$y^2 - x^2 - z = 0 \quad \text{ou}$$

$$z = y^2 - x^2$$

Esta quádrica tem o aspecto de uma sela (de cavalo), assim:



Para $x = 0$ temos $z = y^2$ que é uma parábola no plano yz e para $y = 0$ temos $z = -x^2$ que é uma parábola "invertida"no plano xy .

Para $z = 0$ temos as duas bissetrizes do plano xy e $z \neq 0$ da hipérbole. Para y constante teremos sempre parábolas.

As retas r de $\mathbb{R}^3$ que passam por um ponto da bissetriz $x = y$, por um ponto da parábola $(x = 0)$ $z = y^2$ e que são perpendiculares à bissetriz $x = y$, estão contidas no parabolóide hiperbólico.

Tomemos então o ponto $(a, a, 0)$ da bissetriz e o ponto $(0, y, y^2)$ da parábola. Uma reta que passe por estes dois pontos tem vetor diretor.

$$(a, a, 0) - (0, y, y^2) = (a, a - y, -y^2)\,.$$

Queremos que este seja perpendicular ao vetor $(a, a, 0)$ da bissetriz. Isto nos dá para y o valor $y = 2a$ e temos o vetor diretor de nossa reta como $(a, -a, -4a^2)$. Portanto a equação paramétrica da reta em questão é

$$r(t) = t(a, -a, -4a^2) + (a, a, 0)$$

ou em coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= a + at \\ y &= a - at \\ z &= -4a^2t \end{aligned}$$

Devemos então substituir estas coordenadas na equação $y^2 - x^2 = z$ e ver se as mesmas a satisfazem, vejamos:

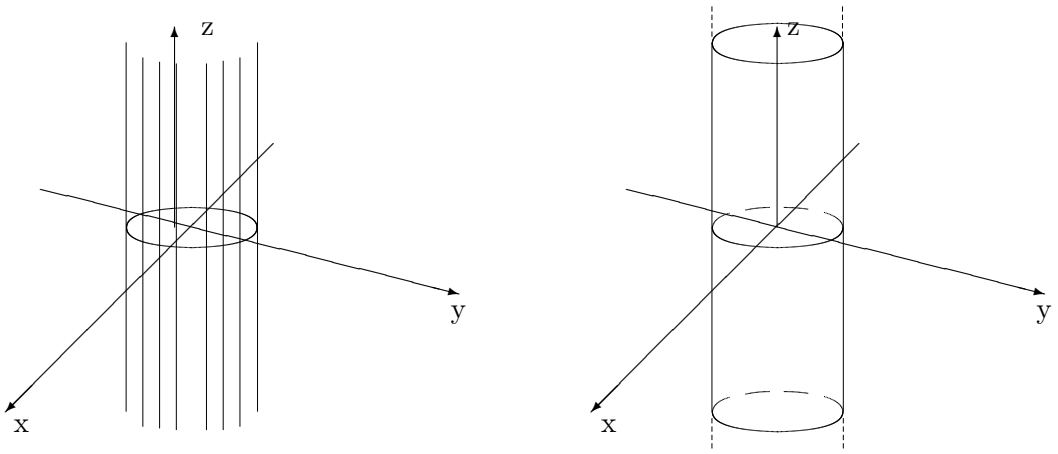
$$\begin{aligned} (a - at)^2 - (a + at)^2 &= a^2 + a^2t^2 - 2a^2t - a^2 - a^2t^2 - 2a^2t \; = \\ &= -4a^2t \end{aligned}$$

como queríamos.

Portanto a reta $r(t)$ acima está contida no parabolóide hiperbólico $y^2 - x^2 = z$. Variando o ponto $(a, a, 0)$ da bissetriz e o correspondente ponto $(0, 2a, 4a^2)$ da parábola, conseguimos cobrir todo o parabolóide hiperbólico com retas e é portanto regrado.

6.2.7 Quádricas cilíndricas

Estamos acostumados a chamar de cilindro a superfície regrada obtida a partir de um círculo, digamos no plano xy, $x^2 + y^2 = r^2$, que é a união de todas as retas paralelas ao eixo z e que passam pelos pontos deste círculo



É claro que o cilindro pode estar em qualquer posição no espaço; basta termos um círculo C num plano D e o cilindro como sendo união das retas perpendiculares a D e passando por pontos do círculo C.

Observemos que a equação $x^2 + y^2 = r^2$ nos dá um círculo no plano $\mathbb{R}^2$, mas se considerarmos esta mesma equação no espaço $\mathbb{R}^3$ o que temos é a superfície cilíndrica acima, pois tal cilindro $\sum$ nada mais é do que:

$$\sum = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\right\}$$

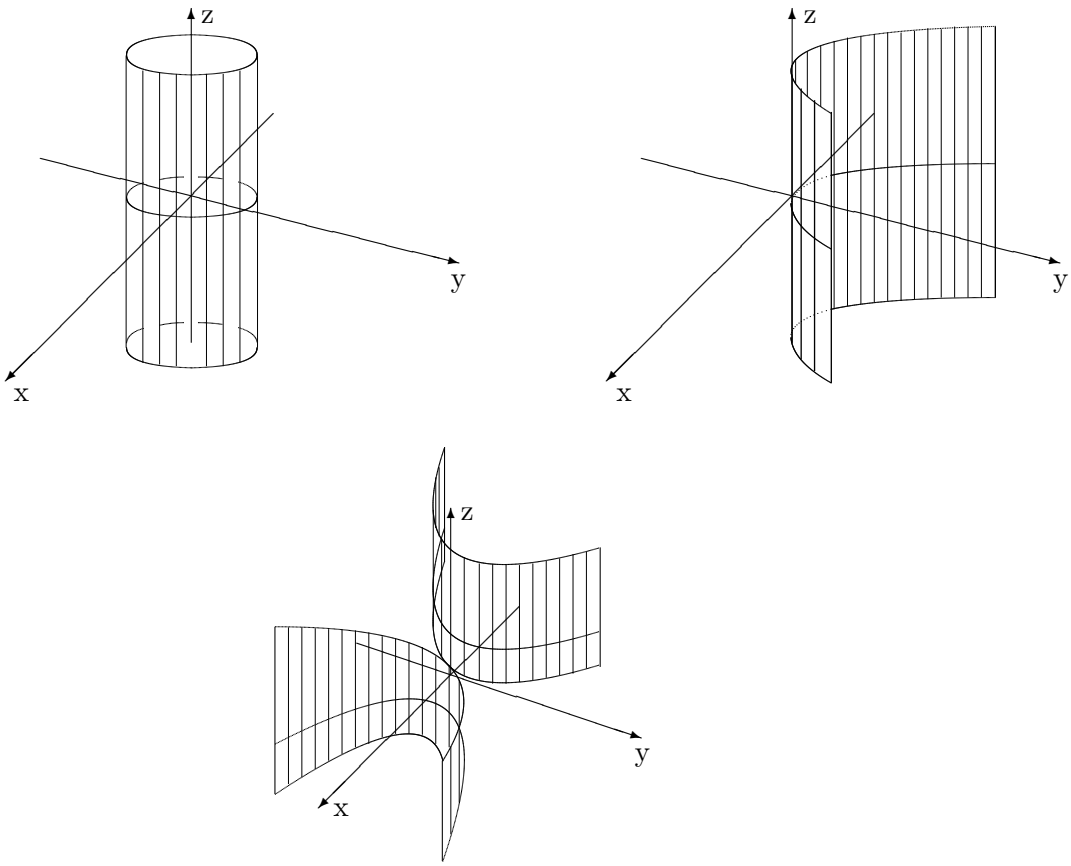
e portanto caracterizado pela mesma equação do círculo em $\mathbb{R}^2$. A coordenada z fica livre. Para cada ponto (x_0, y_0) do círculo temos a reta $\{(x_0, y_0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ passando por $(x_0, y_0, 0)$ e paralela ao eixo z.

De um modo geral, se temos a equação de uma cônica em $\mathbb{R}^2$, como:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0 \ ,$$

ao considerarmos esta mesma equação em $\mathbb{R}^3$, isto é, permitindo uma terceira coordenada x_3, que fica portanto livre, teremos uma superfície que chamamos de cilíndrica, determinada pela cônica de mesma equação em $\mathbb{R}^2$. Desta forma teremos os cilindros elípticos, determinados por elipses; os cilindros parabólicos, por

parábolas e os cilindros hiperbólicos, por hipérboles. Há ainda os que vem das cônicas degeneradas.



Estes cilindros apresentados satisfazem uma equação do segundo grau e portanto fazem parte da família das quádricas.

Capítulo 7

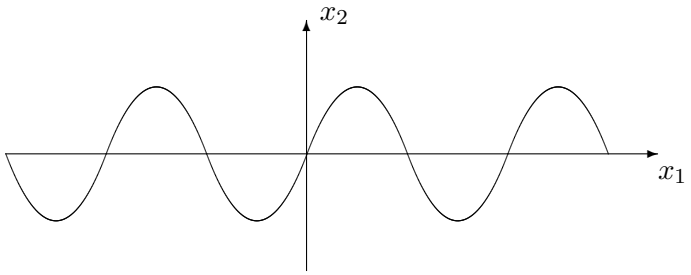
Curvas Transcedentais

As curvas planas que estudamos (cônicas) são soluções de equações do tipo $p(x_1, x_2) = 0$ onde p é um polinômio do segundo grau nas variáveis (x_1, x_2).

Mais geralmente se p é um polinômio em (x_1, x_2) de grau n, o conjunto solução da equação $p(x_1, x_2) = 0$ é chamado de curva algébrica (plana e de grau n). Portanto as curvas que estudamos são algébricas de grau 2.

Curvas que não são algébricas chamadas de transcedentes. Um exemplo é a curva C plana dada pelo gráfico da função sen x; seus pontos são

$$C = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = \text{sen } x_1\right\}$$



Esta curva não pode ser o conjunto solução de uma equação polinomial $p(x_1, x_2) = 0$ com p de grau n qualquer. Podemos concluir este fato observando que, se assim

fosse, fazendo $x_2 = 0$ teríamos um polinômio numa variável x_1 com uma infinidade de raízes, já que sen $x_1 = 0$ tem uma infinidade de zeros.

7.1 Exponencial e logarítimo

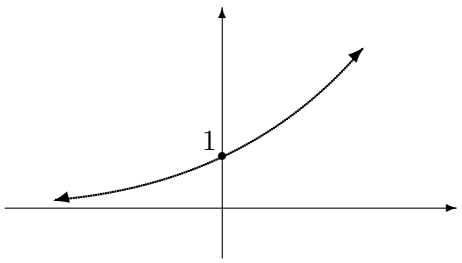
Não nos deteremos nas funções trigonométricas, já que são bastante familiares. Há uma função que apesar de muito conhecida, vale a pena repetí-la; trata-se da função real, definida em toda a reta real e a que chamamos de exponencial de base e.

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\exp(x) = e^x$$

Esta função pode ser definida como sendo a única, da reta na reta, que vale 1 no zero, $\exp(0) = 1$ e que é igual à sua derivada em todos os pontos

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Seu gráfico tem o aspecto abaixo:

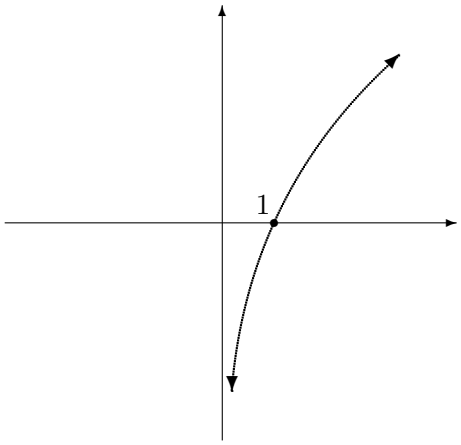


Ele é uniforme em sua concavidade, não cruza o eixo x e se aproxima deste para x tendendo ao "infinito negativo".

$$\exp(x) = e^x > 0 \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Esta função tem invesa que é a que chamamos de logaritmo natural $\ell_n(x)$ de base e, ou ainda de neperiano. O gráfico da função inversa da $\exp(x)$ é obtido refletindo-

se o gráfico da $\exp(x)$ segundo a bissetriz do primeiro quadrante. O função logaritmo natural $\ell_n(x)$ tem para gráfico então:



Portanto $\ell_n(x)$ está definida só na semireta positiva

$$\ell_n : \mathbb{R}^{++} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\ell_n\, t = x$$

se e somente se $\exp(x) = t$, ou seja

$$\exp(\ell_n\, t) = t$$

e

$$\ell_n(\exp(x)) = x$$

Usando a regra da cadeia na derivação de função composta, chegaremos a

$$\ell_n{}'(x) = \frac{1}{x}$$

7.2 Cardióide

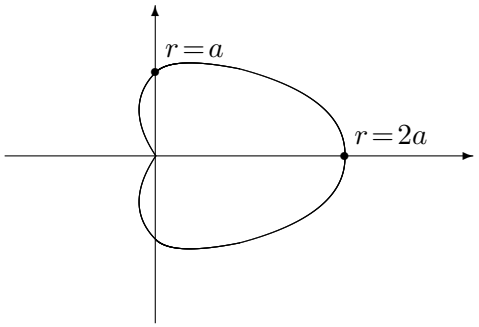
A cardióide tem equação em coordenadas polares assim:

$$r = a(1 + a\cos\theta), \quad a > 0\,.$$

Ela tem uma equação em coordenadas cartesianas que a torna algébrica de grau 4, a saber

$$(x_1^2 + x_2^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

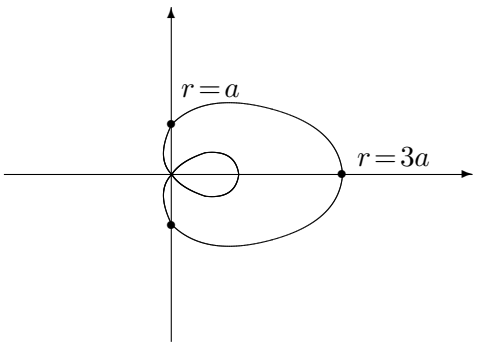
A cardióide tem seguinte aspecto (de coração)



7.3 Limaçon

Esta é uma variação da cardióide, de equação polar

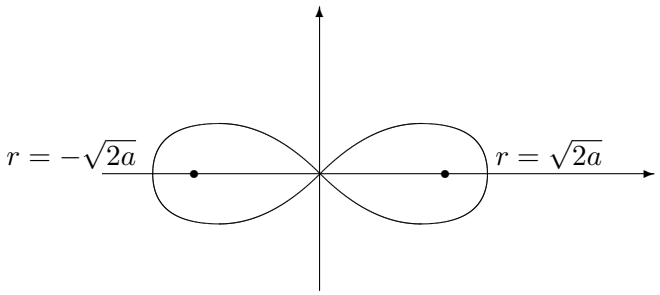
$$r = a(1 + 2\cos\theta), \quad a > 0$$



7.4 Lemniscata

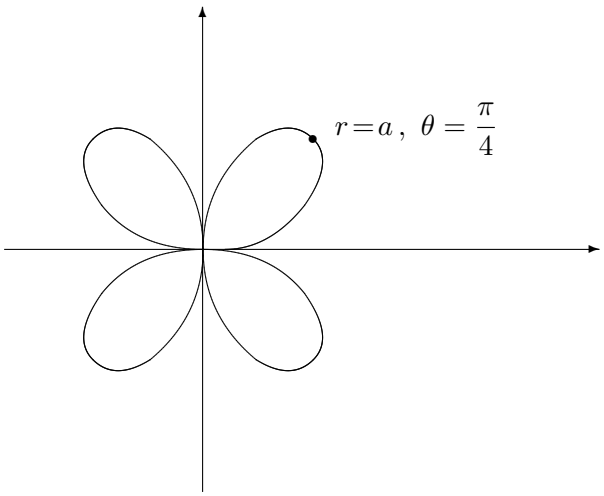
Esta é uma "figura oito"deitada. Tem equação polar

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$



7.5 Trevo de quatro folhas

Tem equação polar: $r = a \text{ sen } 2\theta\,, \quad a > 0$



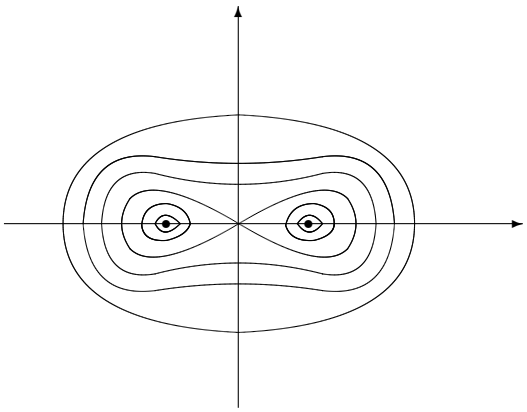
7.6 Ovais de Cassini

Tem equações polares:

$$b^4 = r^4 + a^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta$$

se $a = b$ ela se reduz à limniscata.

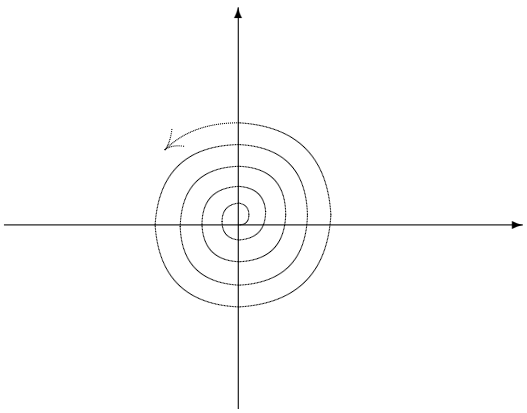
Com a variação de a ou b temos as curvas



7.7 Espiral de Arquinedes

Esta é uma espiral de equação polar muito simples, a saber

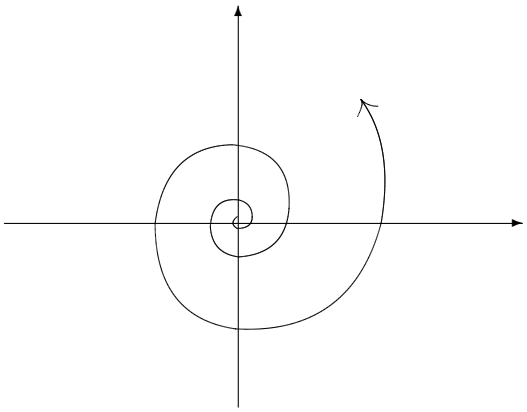
$$r = a\theta\,, \quad a > 0$$



Observe que, a cada volta de 2π , o raio r aumenta de $2a\pi$. Portanto esta espiral se enrola sobre si mesma mantendo a distância $2a\pi$.

7.8 Espiral exponencial

Esta tem equação polar $r = a\,e^{b\theta}$, $a > 0$, $b > 0$ bem diferente da de Arquimedes. À medida que se enrola sobre si mesma, ela se distancia e nunca atinge a origem, pois enquanto θ vai para o infinito negativo ela se enrola em torno da origem tendendo a esta, nunca o atingindo.



Obs 1. Tanto a espiral de Arquimedes como a exponencial encontram cada círculo do plano (com centro na origem) num único ponto, pois em cada equação podemos tirar θ em função de r .

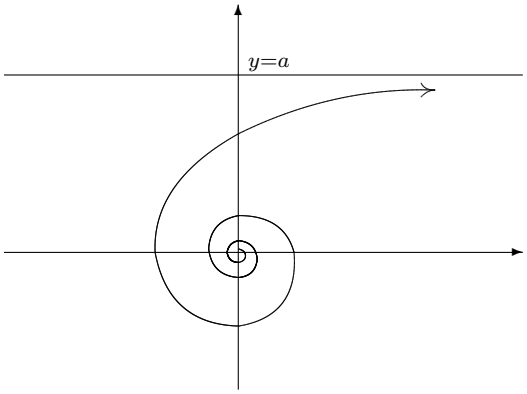
Obs 2. Tomemos a espiral exponencial dada por $r = e^{\theta}$. Se aplicarmos a esta uma homotetia de razão $a > \theta$ teremos a nova equação $r = ae^{\theta}$. Como a é positivo, ele pode ser escrito como $a = e^{\varphi}$, φ constante. Daí

$$r = e^{\varphi}e^{\theta} = e^{(\theta+\varphi)}$$

e teremos a mesma espiral reparametrizada para começar no ponto de ângulo φ . Isto está nos dizendo que se aplicarmos à espiral inicial uma rotação de ângulo φ , haverá uma homotetia que a levará se sobrepor à original. O caso aparentemente mais geral $r = ae^{b\theta}$ se reduz a este que examinamos (após uma reparametrização).

7.9 Espiral hiperbólica

Sabemos que a equação $y = \dfrac{a}{x}$ é a de uma hipérbole, assim esta empresta o nome para a espiral hiperbólica que tem equação $r = \dfrac{a}{\theta}$, $a > 0$, $t > 0$. Esta espiral é de natureza bem diferente das anteriores, já que tem assíntota. Vejamos



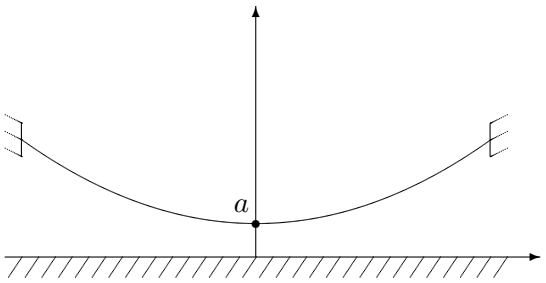
Quando θ vai para zero, r vai para o infinito. Como $y = r \text{ sen } \theta = \dfrac{a}{\theta} \text{ sen } \theta$ ou

$$y = a \frac{\text{sen } \theta}{\theta}$$

Sabendo que o limite de $\dfrac{\text{sen } \theta}{\theta}$ é 1 para θ tendendo a zero temos a reta assíntota da espiral como sendo $y = a$.

7.10 Catenária

Se tomarmos um fio (corrente, cabo de aço, etc...) homogêneo e prendermo-lo pelas extremidades, deixando-o cair sobre seu próprio peso, o mesmo se estabilizará, formando uma curva



a que denominamos de catenária.

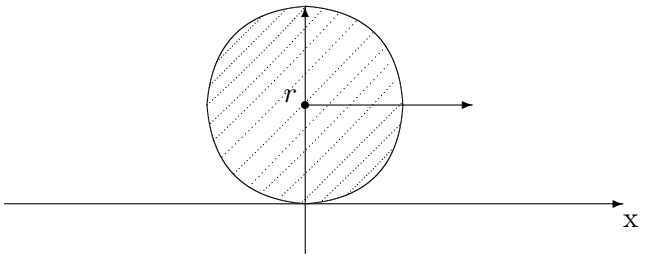
A equação que descreve tal curva é

$$y = a \cos h\, x \ ,$$

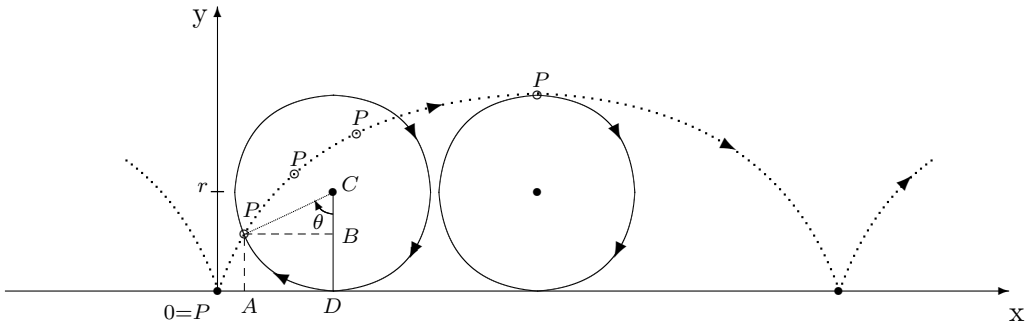
isto é, a catenária que tem seu ponto de altura mínima $a > 0$, é o gráfico da função $a \cdot$ cosseno hiperbólico de x.

7.11 Ciclóide

Consideremos um disco dado pelo círculo de centro $(0, r)$ e raio r, no plano $\mathbb{R}^2$.



Façamos este disco rolar sobre o eixo x, sem deslizar, digamos no sentido de $x > 0$ e observemos o movimento do ponto $P = (0, 0)$ marcado no disco



Definição 7.11.1. *A curva ciclóide é o lugar geométrico, de um ponto da fronteira de um disco, que rola sobre uma reta, sem deslizar.*

As equações paramétricas desta ciclóide são:

$$x = r(\theta - \text{sen } \theta) \quad \text{e} \quad y = r(1 - \cos\theta);\ \theta \in \mathbb{R}$$

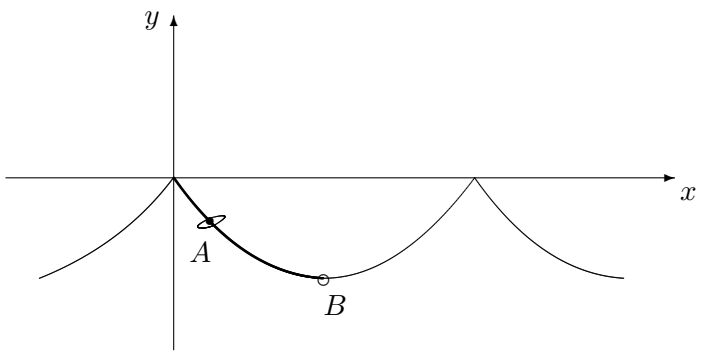
A ciclóide tem "bicos", singularidades nos pontos $x = 0\,,\ \pm 2\pi r,\ \pm 4\pi r,\ \ldots$ Nos demais pontos ela tem reta tangente e é suave.

Derivando estas expressões obtemos

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \quad \text{e}$$

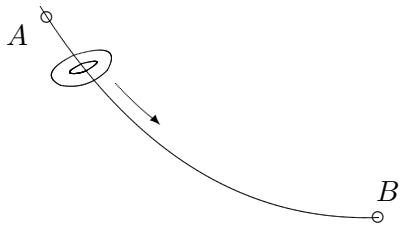
$$\frac{dy}{d\theta} = r\ \text{sen}\ \theta$$

Se colocarmos o disco tangenciando o eixo x, porém no semiplano inferior, ou seja, com centro em $(0, -r)$ e raio r, teremos a ciclóide invertida.



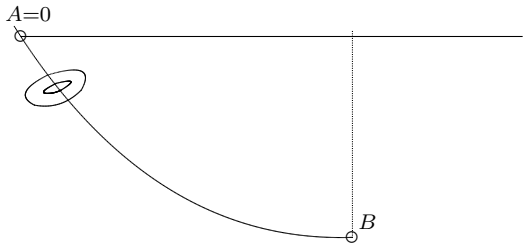
Esta curva tem várias propriedades físicas importantes. Façamos uma ilustração:

Suponhamos que um fio de arame passe pelos pontos A e B da curva como acima e que possamos entortá-lo arbitrariamente, mantendo os pontos A e B fixados. Suponhamos ainda que uma pequena bola perfurada passa deslizar livremente ao longo do arame que liga A a B.



O problema que se coloca é: qual o formato do arame que fará com que a bolinha deslize de A até B em tempo mínimo; só sob a ação da gravidade? Há uma vontade de responder que o formato do arame deveria ser o de um segmento de reta, mas neste caso não é a resposta certa. O formato que dá o tempo mínimo é o de uma ciclóide invertida, com A na origem!

Outra propriedade física interessante e até surpreendente é a seguinte: Suponhamos que A seja a origem e B o ponto mais baixo da ciclóide, isto é, coordenada y mínima

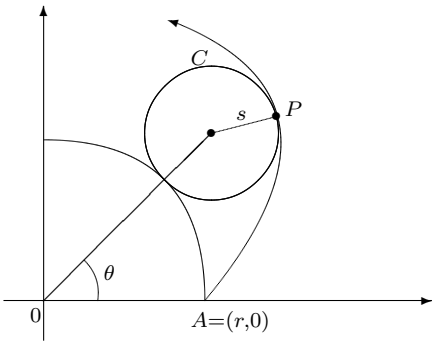


Liberada a bolinha em qualquer ponto entre A e B, o tempo que a mesma leva para chegar a B é sempre o mesmo!

7.12 Epiciclóide

Um círculo C de raio s rola sobre a parte externa da circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, com $b < r$.

Seja P um ponto fixado em C e $A = (r, 0)$ a posição inicial de P



Definição 7.12.1. *A curva epiciclóide é o lugar geométrico descrito pelo ponto P, quando o círculo C, de raio s, rola sobre a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, com $s < r$, sem deslizar.*

Suas equações paramétricas são:

$$x = (r+s)\cos\theta - s\cos\left(\frac{r+s}{s}\ \theta\right)$$

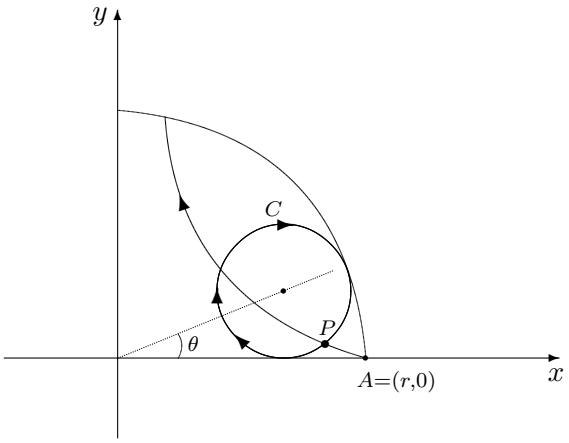
$$y = (r+s)\ \text{sen}\ \theta - s\ \text{sen}\ \left(\frac{r+s}{s}\ \theta\right)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

7.13 Hipociclóide

Esta curva difere da anterior em que fazemos o círculo C rolar internamente à circunferência.

Definição 7.13.1. *A Hipociclóide é o lugar geométrico descrito por um ponto P de um círculo C de raio s, que rola internamente numa circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, com $s < r$ e sem deslizar.*



A hipociclóide tem as equações paramétricas:

$$x = (r-s)\cos\theta + s\cos\left(\frac{r-s}{s}\ \theta\right)$$

$$y = (r-s)\ \text{sen}\ \theta - s\ \text{sen}\ \left(\frac{r-s}{s}\ \theta\right)\ ;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$